

pISSN 2073-1477
eISSN 2311-8733

Экономико-математическое моделирование

ПРОБЛЕМА ИЗМЕРЕНИЯ ОБЪЕМОВ ВЫПУСКОВ В БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ В.В. ЛЕОНТЬЕВА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА СТРАН И ТЕРРИТОРИЙ*

Николай Иванович КУРЫШЕВ

кандидат экономических наук,
ведущий программист ПАО «Запсибкомбанк»,
Тюмень, Российская Федерация
klaus1776@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-2355-2572>
SPIN-код: 3741-1947

История статьи:

Рег. № 298/2021
Получена 17.05.2021
Получена в
доработанном виде
28.06.2021
Одобрена 09.07.2021
Доступна онлайн
16.08.2021

УДК 330.44

JEL: B16, B51, D57

Ключевые слова:

модель Леонтьева,
межотраслевой
баланс, матрица
прямых затрат,
воспроизводство,
теория стоимости

Аннотация

Предмет. Проблема построения матрицы прямых затрат Леонтьева.

Цели. Определение правил построения матрицы прямых затрат Леонтьева на основе данных о времени производства и объемах выпусков продуктов.

Методология. В процессе исследования использованы методы логического и математического анализа.

Результаты. Сформулированы правила построения матрицы прямых затрат Леонтьева, учитывающие различия во времени производства продуктов, в объемах их выпусков, а также условия воспроизводства затрачиваемых ресурсов. Дано обобщение этих правил для модели Дж. фон Неймана.

Выводы. Изложенный подход к анализу материального механизма экономического воспроизводства определяет взаимосвязь количественных и стоимостных характеристик процессов производства и потребления продуктов и ресурсов. Эта взаимосвязь открывает новые возможности для применения балансовых моделей в целях создания простых и точных алгоритмов идентификации и прогнозирования динамики макроэкономических характеристик хозяйственных систем.

© Издательский дом ФИНАНСЫ и КРЕДИТ, 2021

Для цитирования: Курышев Н.И. Проблема измерения объемов выпусков в балансовой модели В.В. Леонтьева при моделировании динамики экономического воспроизводства стран и территорий // Региональная экономика: теория и практика. – 2021. – Т. 19, № 8. – С. 1568 – 1592.
<https://doi.org/10.24891/re.19.8.1568>

Введение

Балансовые отношения являются самым простым и надежным макроэкономическим ориентиром при оценке и планировании производства [1], поэтому их открытие [2] было воспринято научным сообществом как открытие некоего универсального принципа, позволяющего достаточно просто определить все аспекты хозяйственной жизни: производство, социальную сферу, экологию [3–5]. Однако, несмотря на первоначальный энтузиазм, вскоре стало понятно, что практическое применение этого принципа сопряжено с серьезными трудностями, задача разрешения которых по сложности значительно превосходит содержание самой идеи хозяйственного кругооборота [6]. Эти трудности сводятся к двум фундаментальным проблемам:

- получаемые посредством эмпирических наблюдений параметры балансовых моделей должны отвечать концепции кругооборота, то есть должны воспроизводить составляющие основу модели кругооборота повторяющиеся квазистационарные режимы производства¹, а не реальные производственные процессы;
- эмпирические наблюдения должны исходить из реалий хозяйственной практики, которые заключаются в том, что все экономические величины (производственные затраты, выпуск и потребление) исчисляются в единицах стоимости, а не в натуральном выражении, которым оперирует модель.

Первая проблема требует определения алгоритма приведения реальных характеристик производственных процессов (времени и единиц измерения количеств продукции и ресурсов) к требованиям концепции кругооборота, вторая – определения взаимосвязи цен продуктов с объемами их выпусков и затрат, необходимых для их производства, то есть построения объективистской, или, как ее называл В.В. Леонтьев [2], натуралистической, концепции стоимости.

Идея воспроизводства (очевидность)

Идея построения объективистской концепции стоимости восходит к французским физиократам. Ее методология была впервые изложена Ф. Кенэ

^{*} Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ и Тюменской области в рамках научного проекта № 20-47-720001.

¹ Дмитриенко Д.В., Сахаров В.В., Чертков А.А. Алгоритм оценки матрицы прямых затрат в модели анализа межотраслевых связей В. Леонтьева // Транспортное дело России. 2017. № 3. С. 97–99.

в 1756 г. в его статье «Очевидность» [7, 8]. По мысли физиократов, назначением их теории было определение материальных условий существования общественной системы производства независимо от специфики ее социальной и хозяйственной организации для установления физических пределов извлечения дохода в целях объективного (научного) обоснования государственной налоговой политики². Это определение они основывали на идее воспроизводства (кругооборота), то есть на бесконечном повторении процесса производства при ограниченных ресурсах. Ясно, что в таких условиях получение дохода возможно только посредством создания прибавочного продукта (*surplus product*), поэтому, по сути, теория физиократов есть теория прибавочного продукта, и в этом контексте все последующее развитие классической традиции можно рассматривать как поиск способа объяснения феномена излишка продукта производства над затратами.

Задача объяснения природы прибавочного продукта складывается из двух частей:

- из определения формальных условий воспроизводства продукта;
- из определения источника и условий получения излишка.

За истекшие три столетия экономической науке удалось справиться только с первой частью, результатом чего в наши дни являются модель «затраты – выпуск» В.В. Леонтьева и модель «расширяющейся экономики» Дж. фон Неймана. Эти системы формируют язык и «видение» современной макроэкономики и экономической статистики, и поэтому занимают сегодня одно из ключевых мест в экономической науке. Однако они не решают вторую часть задачи, связанную с определением объективных условий потребления, что делает все перечисленные результаты бесполезными с практической точки зрения [6].

С момента возникновения классической политической экономии было интуитивно понятно, что именно условия потребления обуславливают стоимость продуктов производства и что объективные законы формирования стоимости сопряжены с аллокацией исходного производительного ресурса системы. В силу названных причин попытки раскрыть сущность этого ресурса и его взаимосвязь со спросом мы находим у всех исследователей, работавших в русле классической традиции. Можно назвать такие категории, как «труд» у А. Смита, Д. Рикардо и К. Маркса;

² Курц Х.Д. Краткая история экономической мысли. М.: Институт Гайдара, 2020. 312 с.

«пракапитал» у Г. Харазова³; «стандартный товар» у П. Сраффы [9], «машина М», способная к самовоспроизводству, у В.К. Дмитриева [10].

Однако ни один из этих авторов не сумел довести решение этой задачи до логического конца [11, 12], из-за чего к началу второй четверти XX в. в научном сообществе сложилось скептическое отношение к классике, которая теперь почти единодушно воспринималась как исчерпавшее себя течение экономической мысли. На наш взгляд, именно поэтому проблема ограниченности ресурсов и стоимости исчезает из работ В.В. Леонтьева, Р. Ремака и Дж. фон Неймана, интересовавшихся с тех пор сугубо техническим вопросом «динамической эффективности экономики», понимаемой ими как поиск экстремальных с точки зрения объема выпуска режимов воспроизводства⁴. Этот вопрос они стремились решить независимо от цен, исходя из одних только технологических параметров производственной системы.

Однако проблема стоимости по-прежнему сохраняет определяющее значение для эмпирического исследования экономики, потому что утверждаемое авторами натуралистической концепции производства «технократическое видение» хозяйства в действительности невозможно. Этот вывод непосредственно следует из того, что совокупные затраты и объем выпуска продукции практически могут быть измерены только в единицах стоимости, поэтому любая оптимизационная модель производства в конечном итоге вынуждена оперировать терминами стоимости (капитала, затрат и доходности), а натуралистическая гипотеза о вторичности цен по отношению к технике производства оказывается практически несостоятельной. Экономикой правит спрос, и задача объективистской теории стоимости состоит лишь в том, чтобы показать, каким образом объективные условия производства предопределяют наши субъективные оценки, тогда как сторонники натуралистического подхода усматривают эту задачу в отрицании субъективной природы экономической ценности вообще.

Таким образом, проблема «замыкания» воспроизводственной модели [7] заключается не в редукции стоимости производственных затрат к затратам некоего универсального производительного ресурса, а в ее калибровке, то есть в определении материальных законов формирования стоимости. В этом смысле следует признать несостоятельными все феноменологические (статистические, теоретико-игровые, эконофизические, структурные и т.д.)

³Charasoff G. *Das System des Marxismus: Darstellung und Kritik*. Berlin, Hans Bondy, 1910, 347 s.

⁴Куриц Х., Сальвадори Н., Быков В.В. и др. *Теория производства: долгосрочный анализ*. М.: Финансы и статистика, 2004. 632 с.

гипотезы о природе и закономерностях динамики стоимости, интерпретируемой в качестве универсального экономического ресурса [13–16], поскольку рассмотрение стоимости как абстрактной субстанции, наподобие энергии или импульса в физике, нельзя считать корректным, пока не будут определены способы ее объективного измерения, то есть закономерности (инварианты), на основе которых это измерение может быть произведено.

Фактор времени

Первая проблема построения матрицы прямых затрат в модели Леонтьева связана с тем, что в действительности производство разных продуктов требует затрат разного количества времени, тогда как модель описывает производственный цикл, в котором все процессы производства начинаются и заканчиваются одновременно. По этой причине возникает необходимость приведения реальных производственных процессов к требованиям модели.

Для простоты будем рассматривать систему производства двух продуктов – 1 и 2. Балансовую модель цен для этой системы можно записать так:

$$\begin{cases} (a_{11}c_1 + a_{21}c_2)(1+r_1) = c_1 \\ (a_{12}c_1 + a_{22}c_2)(1+r_2) = c_2 \end{cases}, \quad (1)$$

где a_{11} , a_{21} , a_{12} , a_{22} – коэффициенты матрицы прямых затрат, определяемые как затраты продуктов 1 и 2, в производстве каждой единицы выпуска; r_1 , r_2 – доходности производств 1 и 2; c_1 , c_2 – цены продуктов 1 и 2.

Обозначим время производства продуктов 1 и 2 соответственно как β_1 , β_2 . При этом, в общем случае, $\beta_1 \neq \beta_2$. Тогда, очевидно, приведение модели (1) к условиям равенства β_1 и β_2 будет означать такой подбор единиц измерения объемов продуктов 1 и 2, чтобы время их производства было одинаково. Математически это означает, что в качестве единицы измерения объема продукта 1 мы должны принять $\frac{1}{\beta_1}$ единиц этого продукта, а в качестве единицы измерения объема продукта 2 – $\frac{1}{\beta_2}$ единиц продукта 2. Чтобы понять, как смена единиц измерения объемов продуктов 1 и 2 повлияет на вид уравнений (1), рассмотрим процесс перехода к новым единицам измерения последовательно: сначала введем в

уравнения (1) преобразования единиц измерения продукта 1, затем – преобразования единиц измерения продукта 2.

Ясно, что изменение единицы измерения продукта 1 будет иметь следствием изменение коэффициентов матрицы прямых затрат. С одной стороны, изменится количество продукта 2, необходимое для производства новой единицы измерения продукта 1, – коэффициент a_{21} . С другой стороны, изменится выраженное в новых единицах измерения количество продукта 1, необходимое для производства единицы продукта 2, – коэффициент a_{12} . Самопотребление продукта 1 – коэффициент a_{11} – очевидно, останется без изменений. Таким образом, после перехода к новой единице измерения объема продукта 1, когда в качестве единицы измерения объема этого продукта мы будем принимать $\frac{1}{\beta_1}$ прежних единиц этого продукта, уравнения (1) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \left(a_{11}c_1 + a_{21}\frac{1}{\beta_1}c_2 \right) (1+r_1) = c_1, \\ \left(a_{12}\beta_1c_1 + a_{22}c_2 \right) (1+r_2) = c_2 \end{cases}, \quad (2)$$

где $a_{21}\frac{1}{\beta_1}$ – затраты продукта 2, необходимые для производства новой единицы измерения продукта 1; $a_{12}\beta_1$ – затраты продукта 1, необходимые для производства единицы продукта 2, выраженные в новых единицах измерения.

Переход к новым единицам измерения продукта 2 будет иметь следствием аналогичные изменения в коэффициентах матрицы прямых затрат, только теперь со стороны продукта 2. В результате после всех преобразований система (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(a_{11}c_1 + a_{21}\frac{\beta_2}{\beta_1}c_2 \right) (1+r_1) = c_1, \\ \left(a_{12}\frac{\beta_1}{\beta_2}c_1 + a_{22}c_2 \right) (1+r_2) = c_2 \end{cases}, \quad (3)$$

где $a_{21}\frac{\beta_2}{\beta_1}$, $a_{12}\frac{\beta_1}{\beta_2}$ – коэффициенты новой матрицы прямых затрат.

Понятно, что подобные преобразования могут быть произведены для матрицы прямых затрат любой размерности. В общем случае

преобразование произвольной матрицы прямых затрат размерности $n \times n$ будет выглядеть следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots a_{1j} \cdot \frac{\beta_j}{\beta_1} & \cdots a_{1n} \cdot \frac{\beta_n}{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_i} & \cdots a_{ii} & \cdots a_{in} \cdot \frac{\beta_n}{\beta_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_n} & \cdots a_{nj} \cdot \frac{\beta_j}{\beta_n} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\beta_1, \dots, \beta_n$ – время реализации производственных процессов $1, \dots, n$.

Единицы измерения (аксиомы однородности пространства и времени)

Вторая проблема построения матрицы прямых затрат в модели Леонтьева – выявление объективных закономерностей взаимосвязи объемов производства продуктов с их ценами. Содержание этой проблемы заключается в объяснении материального механизма, обуславливающего формирование субъективных экономических оценок, что делает возможным объективное измерение силы субъективных экономических мотивов, то есть создает научный фундамент эмпирического исследования экономики.

Мы основываем это решение на рассмотрении трех фундаментальных закономерностей (симметрий) функционирования материальной системы общественного производства, порождающих объективные силы, определяющие величину и распределение дохода в экономике: это однородность времени; однородность пространства; однородность материи. Первая порождает феномен капитала, вторая – феномен производственных затрат (инвестиций), третья – феномен дохода. Для разъяснения механизма действия этих закономерностей обратимся к материальному содержанию процесса производства.

Мы исходим из того, что с материальной точки зрения производство представляет собой кругооборот, в котором за счет энергии, получаемой посредством комбинации различных видов материи (средств производства), исходный материальный субстрат (сырье) превращается в продукт (средства производства или предметы потребления), аккумулирующий в себе эту энергию. При этом если сырье в результате производства становится продуктом, то средства производства (капитал), напротив, подвергаются разрушению (затрачиваются), обретая форму исходного первоначального

субстрата и создавая таким образом основу для возобновления процесса производства. Схематически этот процесс изображен на *рис. 1*.

На *рис. 1* показана система производства продуктов 1 и 2. В производстве продукта 1 задействуется 2 ед. капитала (белый прямоугольник). За единицу измерения количества материи мы принимаем две клетки по оси абсцисс. В производстве продукта 2 задействуется 4 ед. капитала (серый прямоугольник). Количества капитала в первом и втором производствах обозначаются соответственно C_1 и C_2 . Совокупный объем капитала C , занятого в производстве первого и второго продуктов, равен сумме $C = C_1 + C_2 = 2 + 4 = 6$. Продукты 1 и 2 на схеме, изображенной на *рис. 1*, производятся одновременно, поэтому время производства первого T_1 и второго T_2 продуктов одинаково и равно T . За единицу измерения времени мы принимаем две клетки по оси ординат.

Энергии, получаемой в результате затрат капитала в первом и втором производствах, достаточно только для переработки сырья в количестве, равном количеству самого капитала (простое воспроизводство), поэтому объем перерабатываемого в экономической системе сырья равен объему затрачиваемого в производстве капитала, и составляет соответственно 2 ед. материи в первом производстве и 4 ед. материи во втором. На *рис. 1* сырье изображено в виде пунктирных прямоугольников. Количества сырья, перерабатываемого в первом и втором производствах, обозначаются соответственно J_1 и J_2 . Совокупный объем субстрата J , используемого в производстве первого и второго продуктов, равен сумме $J = J_1 + J_2 = 2 + 4 = 6$. Совокупное количество материи U , занятой в производстве первого и второго продуктов, очевидно, равно сумме совокупного количества капитала и сырья $U = C + J = 6 + 6 = 12$.

Так как производство продуктов 1 и 2 осуществляется одновременно, количество сырья, перерабатываемого каждой единицей капитала за время производства продукта 1 (g_1) и продукта 2 (g_2), будет одинаково и равно g . При этом ясно, что субстрат, используемый в производстве продукта 2 (J_2), не может быть использован для увеличения количества капитала, занятого в производстве продукта 1, и, наоборот, субстрат, используемый в производстве продукта 1 (J_1), не может быть использован для увеличения количества капитала, занятого в производстве продукта 2. Происходит это потому, что состав капитала, в отличие от состава субстрата, неоднороден, так как капитал состоит из продуктов производства, тогда как субстрат – из необработанной материи (сырья).

Таким образом, сберегая капитал в объеме C_1 , для производства продукта 1 мы лишаемся возможности использовать субстрат в объеме J_2 , и, наоборот, сберегая капитал в объеме C_2 , мы лишаемся возможности использовать субстрат в объеме J_1 . Можно сказать, что стоимостью, которую мы платим за сбережение капитала C_1 , является количество субстрата J_2 , а стоимостью, которую мы платим за сбережение капитала C_2 , является количество субстрата J_1 . Понятие стоимости как утраченной экономической альтернативы более наглядно можно показать, представив процесс производства продуктов 1 и 2 во времени, что всегда можно сделать путем соответствующего перераспределения занятой в производстве материи между капиталом C и сырьем J . Процесс производства продуктов 1 и 2 во времени показан на *рис. 2*.

При рассмотрении производства продуктов 1 и 2 во времени мы исходим из аксиомы однородности пространства производственной системы. Аксиома однородности пространства производственной системы (закон формирования затрат) заключается в том факте, что для реализации процесса воспроизводства, то есть бесконечного повторения циклов производства при ограниченных материальных ресурсах, необходимо, чтобы различные производства обменивались равными с точки зрения производственных возможностей количествами средств производства, то есть такими их количествами, использование которых позволяет переработать одинаковое количество сырья. На *рис. 2* средства производства, которыми обмениваются производства продуктов 1 и 2, обозначены соответственно I_1 и I_2 , причем I_1 – это количество продукта 1, используемого в качестве средства производства в производстве продукта 2, а I_2 – это количество продукта 2, используемого в качестве средства производства в производстве продукта 1. Так как теперь производство осуществляется последовательно во времени, количества сырья, перерабатываемые каждой единицей капитала за время производства, в общем случае будут не одинаковы для первого и второго производств, то есть $g_1 \neq g_2$.

На *рис. 1, 2* показан случай простого воспроизводства, или, по терминологии П. Сраффы, производственная система, находящаяся в самозамещающем состоянии [9], то есть система, в которой отсутствует излишек продукта над средствами производства – энергии системы хватает только на возобновление (замещение) затрат. Понятно, что бесконечное возобновление средств производства, затрачиваемых в производствах

продуктов 1 и 2, возможно, только если объемы используемого в них капитала не меняются со временем, что осуществимо только в том случае, если объемы средств производства, которыми обмениваются производства 1 и 2, будут одинаковы, то есть если выполняется равенство $I_1 = I_2$.

Иными словами, аксиома однородности пространства производственной системы означает, что каждая единица продукта производства должна вносить одинаковый вклад как в свое собственное производство, так и в производство любого другого продукта, в котором она используется в качестве средства производства. Математически это означает, что при произвольном выборе единицы измерения количеств продуктов 1 и 2 их фактические единицы измерения, то есть единицы измерения, равные их количествам, обеспечивающим переработку одинаковых объемов сырья, можно определить из уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 = \lambda c_1 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 = \lambda c_2 \end{cases}, \quad (5)$$

где a_{11} – самопотребление продукта 1 в произвольных единицах измерения; a_{21} – количество продукта 2 в произвольных единицах измерения, затрачиваемое в производстве произвольной единицы продукта 1; a_{22} – самопотребление продукта 2 в произвольных единицах измерения; a_{12} – количество продукта 1 в произвольных единицах измерения, затрачиваемое в производстве произвольной единицы продукта 2; c_1 – количество фактических единиц продукта 1, содержащееся в каждой его произвольной единице; c_2 – количество фактических единиц продукта 2, содержащееся в каждой его произвольной единице; λ – множитель, определяющий наличие ($\lambda > 1$) или отсутствие ($\lambda = 1$) излишка продукта в системе.

Ясно, что в состоянии самозамещения (рис. 2) состав совокупного продукта системы, то есть отношение объемов производства продуктов 1 и 2, нельзя варьировать, так как оно полностью определяется технологией производства – коэффициентами матрицы прямых затрат системы (A). Изменение состава совокупного продукта системы возможно только за счет излишка продукта.

Случай производства с излишком показан на рис. 3. Излишек продуктов 1 и 2 показан пунктирным прямоугольником, расположенным справа от сплошного прямоугольника, изображающего кругооборот средств производства системы. Из рис. 3 видно, что энергии, получаемой в

результате реализации технологических процессов производства продуктов 1 и 2, оказывается достаточно для обработки сырья в количестве, превосходящем капитал системы, то есть $J > C$. Из рис. 3 также видно, что для увеличения объема выпуска продукта 2 часть продукта 1, используемая в качестве средств производства в производстве продукта 2 I_1 , извлекается из излишка продукта 1 – серый прямоугольник I_2 частично попадает в выделенную справа пунктиром область излишка продукта 1. Это означает, что часть (единица) продукта I_2 , обмениваемая производством 1 на продукт I_1 , используется в качестве предмета потребления, а не средства производства.

Стоимость производства продуктов 1 и 2 мы выводим из аксиомы об однородности времени производственной системы (закон формирования капитала), констатирующей тот факт, что каждая единица материи может быть одновременно использована в производстве не более чем одного вида продукта. Это означает, что для производства нескольких различных продуктов мы должны разделять во времени ограниченный исходный материальный субстрат (сырье) системы J , что неизбежно связано с простым части ее капитала C .

Из рис. 2, 3 видно, что процессы производства продуктов 1 и 2 осуществляются поочередно, и в то время, пока реализуется производство продукта 1 (T_1), капитал, занятый в производстве продукта 2 (C_2), не может быть задействован, то есть должен простаивать. Точно так же, во время производства продукта 2 (T_2), должен простаивать капитал, занятый в производстве продукта 1 (C_1). Очевидно, потери P_1 от простоя капитала (C_1) за время производства продукта 2 будут равны

$$P_1 = C_1 T_2, \quad (6)$$

а потери P_2 от простоя капитала (C_2) за время производства продукта 1 будут равны

$$P_2 = C_2 T_1. \quad (7)$$

Величины P_1 и P_2 составляют стоимость, которую платит система за производство продуктов 1 и 2 соответственно. Потери P_1 и P_2 обуславливаются необходимостью сбережения капиталов (C_1) и (C_2) во время производства продуктов 2 и 1 соответственно, и поэтому, по сути, представляют стоимость их сбережения.

Теперь рассмотрим основные количественные характеристики нашей производственной системы. Фактические объемы выпусков продуктов 1 и 2 – G_1 и G_2 – будут вычисляться по формулам

$$G_1 = \lambda d_1 C_1 T_1, \quad G_2 = \lambda d_2 C_2 T_2, \quad (8)$$

где d_1 и d_2 – коэффициенты пропорциональности, определяющие физическое строение исходного материального субстрата (сырья) производственной системы, то есть его способность превращаться в продукты 1 и 2 соответственно.

Фактические объемы выпусков можно выразить через количества сырья, перерабатываемые каждой единицей капитала за время производства – g_1 и g_2 :

$$G_1 = \lambda g_1 C_1, \quad G_2 = \lambda g_2 C_2. \quad (9)$$

Совокупный объем капитала системы C связан с совокупным объемом имеющегося в ней исходного материального субстрата (сырья) отношением

$$C = \lambda J. \quad (10)$$

Введем отношения между количеством капитала и временем производства продуктов 1 и 2:

$$T_1 = b_1 C_1, \quad T_2 = b_2 C_2, \quad (11)$$

где b_1 и b_2 – коэффициенты, определяющие соотношение времени и капитала в производстве продуктов 1 и 2 соответственно. Тогда можно записать

$$\frac{T_1}{T_2} = \rho \frac{C_1}{C_2}, \quad (12)$$

где $\rho = \frac{b_1}{b_2}$.

Таким образом, процесс воспроизводства для нашей системы, производящей два продукта, будет определяться системой уравнений:

$$\begin{cases} N = \pi v \tau \\ \rho v = \tau \\ N = \eta v \\ C_1 + C_2 = \lambda J \\ T_1 + T_2 = T \end{cases}, \quad (13)$$

где $N = \frac{G_1}{G_2}$, $\tau = \frac{T_1}{T_2}$, $v = \frac{C_1}{C_2}$, $\pi = \frac{d_1}{d_2}$.

Подставляя второе уравнение системы (13) в первое и выражая из третьего уравнения η , получим

$$\begin{cases} N = \pi \rho v^2 \\ N = \eta v \\ C_1 + C_2 = \lambda J \\ T_1 + T_2 = T \end{cases}. \quad (14)$$

Наконец, подставляя значение N из второго уравнения системы (14) в первое, окончательно получим:

$$\begin{cases} \eta = \pi \rho v \\ C_1 + C_2 = \lambda J \\ T_1 + T_2 = T \end{cases}. \quad (15)$$

Система уравнений (15) определяет процесс воспроизводства для системы производства двух продуктов при ограниченных материальных ресурсах J в терминах затрат материальных средств производства (C_1 и C_2) и времени (T_1 и T_2).

Цены (инвариант стоимости – аксиома однородности материи)

Объективный закон формирования цен продуктов 1 и 2 мы выводим из аксиомы однородности материи производственной системы (закон формирования дохода), которая исходит из факта, что сбережение каждой единицы материи в экономике должно приносить одинаковый результат с точки зрения потребления, то есть одинаковый доход. Математически это означает, с одной стороны, что цены продуктов потребления, производимых каждой единицей сбережения в единицу времени, должны быть обратно пропорциональны объемам их производства, то есть

$$\frac{\eta}{v} \gamma = \pi \rho \zeta, \quad (16)$$

где $v = \frac{c_1}{c_2}$ – отношение элементов собственного вектора матрицы прямых затрат Леонтьева A , соответствующих максимальному положительному собственному числу этой матрицы, то есть $Ac = \lambda c$ и $c^T = [c_1, c_2]$;

$\eta = \frac{Q_1}{Q_2}$ – отношение объемов выпусков продуктов 1 и 2, выраженных в произвольных единицах измерения, то есть Q_1, Q_2 – объемы выпусков продуктов 1 и 2, выраженные в произвольных единицах измерения;

$y = \frac{p_1}{p_2}$ – отношение цен продуктов Q_1 и Q_2 , то есть p_1, p_2 – цены продуктов 1 и 2;

$\xi = \frac{1+r_1}{1+r_2}$ – отношение доходностей первого и второго производств.

С другой стороны, распределение дохода между различными видами капитала определяет пространственно-временную симметрию производственной системы, то есть равнозначность (однородность) или неравнозначность (неоднородность) затрат сырья и времени в различных производствах. Так, если доходность производства первого продукта будет больше доходности производства второго, то есть если $1+r_1 > 1+r_2$, то это будет означать, что каждая единица времени T_1 , затрачиваемого в производстве первого продукта, будет стоить дороже каждой единицы времени T_2 , затрачиваемого в производстве второго продукта. Можно сказать, что время производства первого продукта будет как бы растягиваться (дефицит времени), а время производства второго продукта – сжиматься (избыток времени), поэтому стоимость сбережения каждой единицы капитала C_1 , занятого в производстве первого продукта, будет меньше стоимости сбережения каждой единицы капитала C_2 , занятого в производстве второго продукта, что вызовет переток капитала из производства второго продукта в производство первого продукта, то есть увеличение C_1 и уменьшение C_2 .

Математически пространственно-временная симметрия в нашей модели определяется множителем ρ . Таким образом, взаимосвязь доходности капитала и пространственно-временной симметрии производственной системы в изложенных терминах будет определяться равенством

$$y\xi\alpha = \rho v, \quad (17)$$

где $\alpha = \frac{Q_1}{Q_2}$, $\xi = \frac{R_1}{R_2}$, $R_1 = 1 - d_{11} - d_{21} \frac{1}{y}$ – доход, содержащийся в каждой единице стоимости продукта 1; $R_2 = 1 - d_{22} - d_{12} y$ – доход, содержащийся в каждой единице стоимости продукта 2.

Подставив значение η из первого уравнения системы (15) в (16), получим

$$v = \frac{\xi v}{y}. \quad (18)$$

Окончательно, подставляя значение v из равенства (18) в уравнение (17), имеем:

$$y^2 \xi \alpha = \pi \rho v \xi. \quad (19)$$

Уравнение (19) определяет объективный (физический) закон формирования цен в системе производства двух продуктов. Этот закон полностью излагается в терминах затрат материи и времени без привлечения абстрактных понятий труда и полезности и, таким образом, задает взаимосвязь материальных и стоимостных характеристик производственной системы, которую далее можно использовать для эмпирической идентификации параметров этой системы.

Главным новшеством развиваемого нами подхода является дополнение концепции воспроизводства идеей исходного материального субстрата производственной системы. Эта идея вводит в леонтьевскую модель кругооборота фактор ограниченности производительных ресурсов, а через него – понятие стоимости производства, и, таким образом, «замыкает» модель [7].

Общий случай («совместное производство») – модель Дж. фон Неймана

Еще одна проблема воспроизводственного анализа, которую нам хотелось бы здесь коротко затронуть, – это обобщение полученных результатов на модель экономического воспроизводства Дж. фон Неймана [17]. В некоторых источниках Дж. фон Неймана называют предшественником В.В. Леонтьева [4]. На наш взгляд, методологически это некорректно. Математически модель фон Неймана реализует более общий подход к моделированию воспроизводственных систем, нежели модель с однопродуктовыми отраслями В.В. Леонтьева. На это указывал и П. Сраффа, называвший метод фон Неймана «совместным производством товаров» и посвятивший анализу этого подхода вторую часть своего труда

[9]. Мы считаем важным показать, как изложенные результаты могут быть обобщены на случай многопродуктовых отраслей.

Содержательно модель фон Неймана представляет собой систему следующих уравнений [16]:

$$\begin{cases} q^T A + y = q^T B \\ Ap + v = Bp \end{cases}, \quad (20)$$

где A и B – матрицы затрат и выпуска соответственно, размера $m \times n$; q – m -мерный вектор уровней «интенсивностей» производств; p – n -мерный вектор цен продуктов; y – n -мерный вектор конечного потребления; v – m -мерный вектор доходов.

Наша задача заключается в том, чтобы найти фактические единицы измерения количества продуктов, то есть построить для (20) систему уравнений, аналогичную (5). Перепишем второе уравнение системы (20) для случая одинаковой отдачи для всех используемых средств производства:

$$Ac = \lambda Bc. \quad (21)$$

Откуда

$$AB^{-1}c = \lambda c. \quad (22)$$

Таким образом, все изложенные нами ранее выводы могут быть легко обобщены на случай многопродуктовых отраслей модели Дж. фон Неймана.

Заключение

Главная сложность определения объективных механизмов формирования стоимости заключается в выявлении универсальных, то есть присущих всем производственным системам, закономерностей реализации процесса производства. Будучи обнаружены, эти закономерности, выражаясь языком физики, позволяют калибровать производственную систему, то есть задать неизменную систему координат (инвариантов), относительно которых ее состояние может быть определено независимо от конкретных условий ее функционирования. Ранее мы сформулировали три таких универсальных закономерности: закон формирования затрат (инвестиций); закон формирования капитала; закон формирования дохода. Каждой из этих закономерностей соответствует определенная симметрия физической системы, в которой реализуется процесс производства. Так, капиталу соответствует однородность времени, затратам – однородность

пространства, доходу – однородность материи. Изложенную нами систему можно интерпретировать как физическую (объективистскую, натуралистическую) теорию стоимости, определяющую понятие стоимости в терминах затрат материи, пространства и времени и, таким образом, реализующую принцип очевидности физиократов [8].

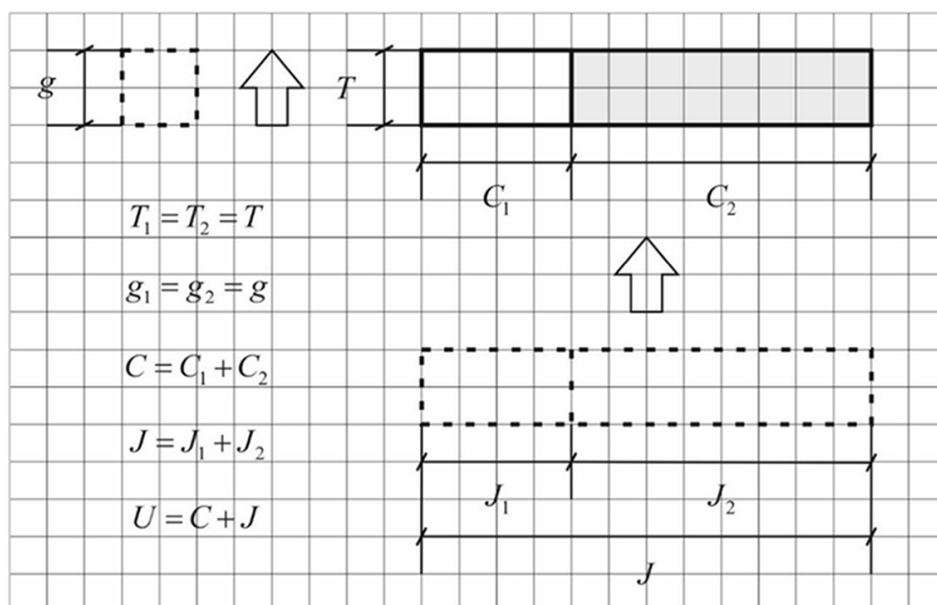
С точки зрения практического применения модели Леонтьева эта система определяет правила трансляции используемых в хозяйственной практике стоимостных характеристик производства в термины материальных затрат. Это открывает принципиально новые, недоступные ранее возможности для повышения точности идентификации балансовых моделей и основанных на них эмпирических исследований региональных и страновых экономических систем.

Рисунок 1

Одновременное производство двух продуктов

Figure 1

Simultaneous production of two products



Источник: авторская разработка

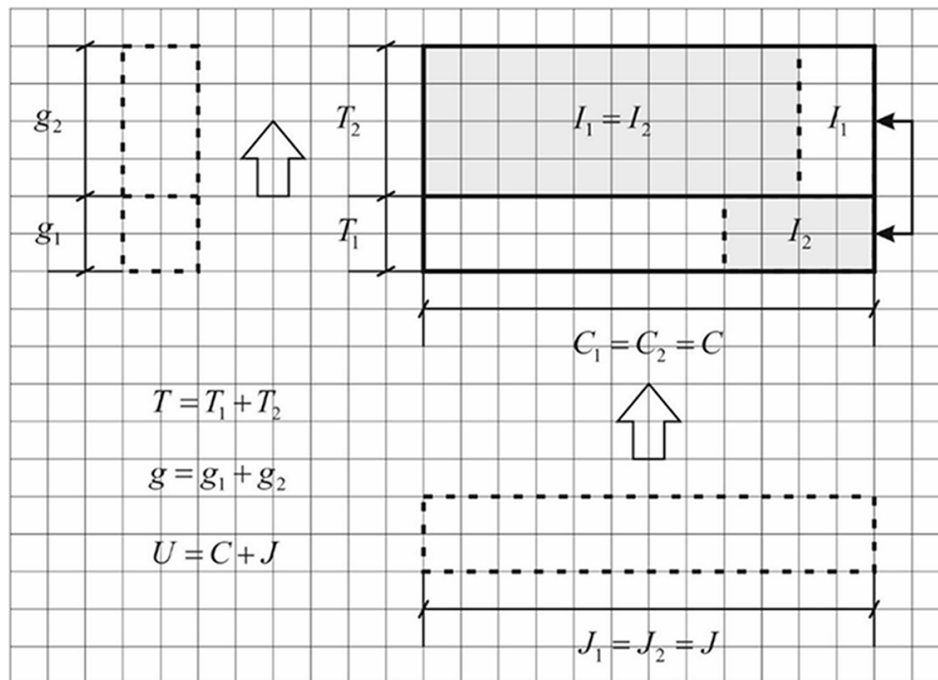
Source: Authoring

Рисунок 2

Последовательное производство двух продуктов

Figure 2

Sequential production of two products



Источник: авторская разработка

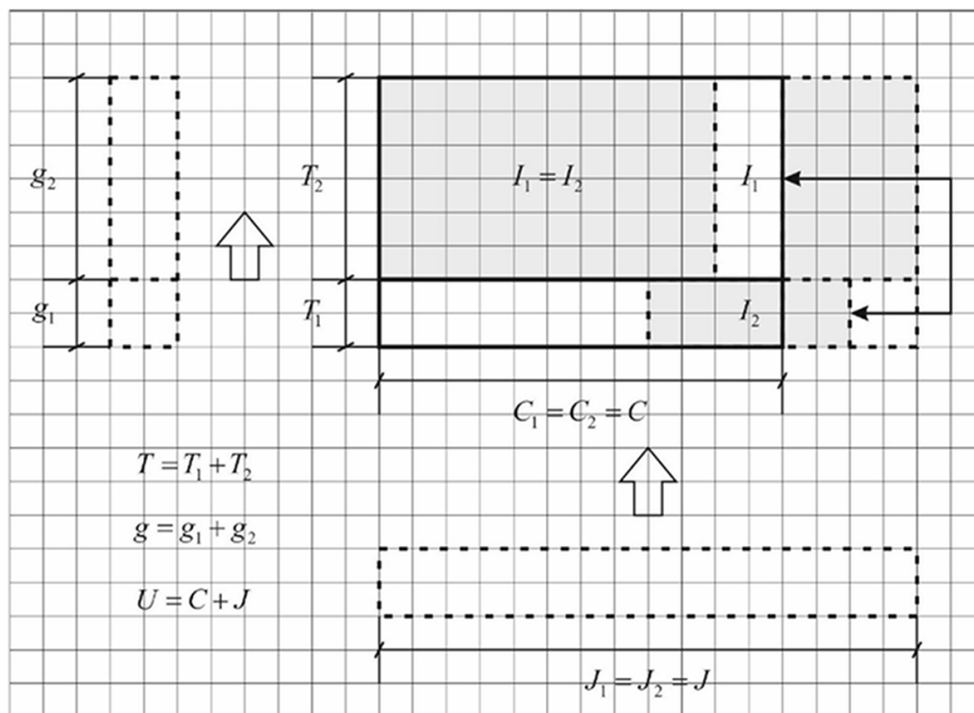
Source: Authoring

Рисунок 3

Последовательное производство двух продуктов с излишком

Figure 3

Sequential production of two surplus products



Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Список литературы

1. Пospelов И.Г. Моделирование российской экономики в условиях кризиса // Вопросы экономики. 2009. № 11. С. 50–75.
URL: <https://doi.org/10.32609/0042-8736-2009-11-50-75>
2. Леонтьев В.В. Хозяйство как кругооборот. В кн.: Избранные произведения: в 3 т. Т. 3. Избранные статьи. М.: Экономика, 2007. С. 24–92.
3. Samuelson P.A. Leontief's "The Economy as a Circular Flow": An Introduction. *Structural Change and Economic Dynamics*, 1991, vol. 2, iss. 1, pp. 177–179. URL: [https://doi.org/10.1016/0954-349X\(91\)90011-G](https://doi.org/10.1016/0954-349X(91)90011-G)
4. Воронцовский А.В. В.В. Леонтьев – выдающийся экономист XX столетия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Экономика.

2007. № 1. С. 3–10. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/v-v-leontiev-vydayuschisya-ekonomist-hh-stoletiya/viewer>
5. Баранов А.О., Павлов В.Н., Тагаева Т.О., Слепенкова Ю.М. Опыт построения и использования межотраслевых региональных моделей эколого-экономического развития // Мир экономики и управления. 2020. Т. 20. № 3. С. 27–47. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opyt-postroeniya-i-ispolzovaniya-mezhotraslevykh-regionalnyh-modeley-ekologo-ekonomicheskogo-razvitiya/viewer>
 6. Курц Х.Д., Сальвадори Н. Расширенная интерпретация концепции «затраты–выпуск»: сравнительный анализ ранних работ В. Леонтьева и П. Сраффы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Экономика. 2007. № 2. С. 3–21. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/rasshirennaya-interpretatsiya-kontseptsii-zatraty-vypusk-sravnitelnyy-analiz-rannih-rabot-v-leontieva-i-p-sraffy/viewer>
 7. Ключин П.Н. Развитие теории хозяйственного кругооборота в XX веке и ее современные перспективы // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: Економіка. 2013. № 146. С. 42–46. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-teorii-hozyaystvennogo-krugooborota-v-hh-veke-i-ee-sovremennye-perspektivy/viewer>
 8. Кенэ Ф. Очевидность. В кн.: Физиократы. Избранные экономические произведения. М.: Эксмо, 2008. С. 45–86.
 9. Сраффа П. Производство товаров посредством товаров (прелюдия к критике экономической теории). М.: ЮНИТИ, 1999. 159 с.
 10. Дмитриев В.К. Экономические очерки. М.: Высшая школа экономики, 2001. 580 с.
 11. Курц Х.Д. Маркс и «закон стоимости». Критическая оценка по случаю 200-летия со дня рождения // Вопросы экономики. 2018. № 11. С. 27–49. URL: <https://doi.org/10.32609/0042-8736-2018-11-27-49>
 12. Бодриков М.В. Сраффианская теория ценности: промежуточный этап возвращения к классике // Terra Economicus. 2018. Т. 16. № 2. С. 46–74. URL: <https://doi.org/10.23683/2073-6606-2018-16-2-46-74>

13. *Рассоха А.В., Шананин А.А.* Обратные задачи анализа межотраслевых балансов // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 3. С. 39–58.
URL: <https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-03>
14. *Al-Salih R., Habeeb A., Laith W.H.* A Quantum Calculus Analogue of Dynamic Leontief Production Model with Linear Objective Function. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1234.
URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1234/1/012102>
15. *Крамаров С.О., Пелихов Н.В., Сахарова Л.В., Храмов В.В.* Модификация модели Леонтьева для описания региональных промышленных кластеров // Вестник университета. 2019. № 12. С. 78–86. URL: <https://doi.org/10.26425/1816-4277-2019-12-78-86>
16. *Павлова Н.Г.* Исследование открытой динамической модели Леонтьева с непрерывным временем как линейной динамической системы с управлением // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 111–116.
17. *Von Neumann J.* A Model of General Economic Equilibrium. *The Review of Economic Studies*, 1945, no. 13, iss. 1, pp. 1–9.
URL: <https://doi.org/10.2307/2296111>

Информация о конфликте интересов

Я, автор данной статьи, со всей ответственностью заявляю о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи. Настоящее заявление относится к проведению научной работы, сбору и обработке данных, написанию и подготовке статьи, принятию решения о публикации рукописи.

pISSN 2073-1477
eISSN 2311-8733

Economic and Mathematical Modeling

THE PROBLEM OF MEASURING THE QUANTITY OF OUTPUT IN THE INPUT-OUTPUT MODEL BY W. LEONTIEF IN MODELING THE TRENDS IN ECONOMIC REPRODUCTION OF NATIONS AND REGIONS

Nikolai I. KURYSHV

PAO Zapsibkombank,
Tyumen, Russian Federation
klaus1776@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-2355-2572>

Article history:

Article No. 298/2021
Received 17 May 2021
Received in revised
form 28 June 2021
Accepted 9 July 2021
Available online
16 August 2021

JEL classification:

B16, B51, D57

Keywords: Leontief's
model, inter-industry
balance, input-output
matrix, reproduction,
theory of value

Abstract

Subject. This article deals with the problem of constructing a Leontief's input-output matrix.

Objectives. The article aims to determine the rules for constructing a Leontief's input-output matrix on the basis of data on production time and quantity of product output.

Methods. For the study, I used the methods of logical and mathematical analyses.

Results. The article formulates the rules for constructing a Leontief's input-output matrix, taking into account differences in the time of production, quantity of output, as well as the conditions for the reproduction of the resources expended. It summarizes these rules for the J. von Neumann model.

Conclusions. The proposed approach to the analysis of the material mechanism of economic reproduction defines the relationship between the quantitative and cost characteristics of the production and consumption of products and resources. This relationship opens up new opportunities for the application of input-output models to create simple and accurate algorithms for identifying and predicting the macroeconomic trends.

© Publishing house FINANCE and CREDIT, 2021

Please cite this article as: Kuryshv N.I. The Problem of Measuring the Quantity of Output in the Input-Output Model by W. Leontief in Modeling the Trends in Economic Reproduction of Nations and Regions. *Regional Economics: Theory and Practice*, 2021, vol. 19, iss. 8, pp. 1568–1592.
<https://doi.org/10.24891/re.19.8.1568>

Acknowledgments

The article was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) and Tyumen Oblast within the framework of research project № 20-47-720001.

References

1. Pospelov I.G. [Modeling Russian economy in the crisis period]. *Voprosy Ekonomiki*, 2009, no. 11, pp. 50–75. (In Russ.)
URL: <https://doi.org/10.32609/0042-8736-2009-11-50-75>
2. Leontief W.W. *Khozyaistvo kak krugoborot. V kn.: Izbrannye proizvedeniya: v 3 t. T. 3. Izbrannye stat'i* [The Economy as a Circular Flow. In: Selected works: in 3 vol. Vol. 3. Selected articles]. Moscow, Ekonomika Publ., 2007, pp. 24–92.
3. Samuelson P.A. Leontief's "The Economy as a Circular Flow": An Introduction. *Structural Change and Economic Dynamics*, 1991, vol. 2, iss. 1, pp. 177–179. URL: [https://doi.org/10.1016/0954-349X\(91\)90011-G](https://doi.org/10.1016/0954-349X(91)90011-G)
4. Vorontsovskii A.V. [W.W. Leontief – The outstanding economist of the 20th century]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ekonomika = St. Petersburg University Journal of Economic Studies*, 2007, no. 1, pp. 3–10. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/v-v-leontiev-vydayuschiysya-ekonomist-hh-stoletiya/viewer> (In Russ.)
5. Baranov A.O., Pavlov V.N., Tagaeva T.O., Slepenskova Yu.M. [Construction and use of the regional input-output model with environmental and economic development blocks]. *Mir ekonomiki i upravleniya = World of Economics and Management*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 27–47. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opyt-postroeniya-i-ispolzovaniya-mezhotraslevykh-regionalnykh-modeley-ekologo-ekonomicheskogo-razvitiya/viewer> (In Russ.)
6. Kurz H.D., Salvadori N. [Input-output analysis from a wider perspective: a comparison of the early works of W. Leontief and P. Sraffa]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ekonomika = St. Petersburg University Journal of Economic Studies*, 2007, no. 2, pp. 3–21. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/rasshirennaya-interpretatsiya-kontseptsii-zatraty-vypusk-sravnitelnyy-analiz-rannih-rabot-v-leontieva-i-p-sraffa/viewer> (In Russ.)
7. Klyukin P.N. [Evolution of the circular flow theory within the 20th century and its present-day perspectives]. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: Економіка*, 2013, no. 146, pp. 42–46. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-teorii-hozyaystvennogo-krugoborota-v-hh-veke-i-ee-sovremennye-perspektivy/viewer> (In Russ.)

8. Quesnay F. *Ochevidnost'. V kn.: Fiziokraty. Izbrannye ekonomicheskie proizvedeniya* [Évidence. In: The Physiocrats. Selected economic works]. Moscow, Eksmo Publ., 2008, pp. 45–86.
9. Sraffa P. *Proizvodstvo tovarov posredstvom tovarov (prelyudiya k kritike ekonomicheskoi teorii)* [Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory]. Moscow, YUNITI Publ., 1999, 159 p.
10. Dmitriev V.K. *Ekonomicheskie ocherki* [Economic Essays on Value, Competition and Utility]. Moscow, Higher School of Economics Publ., 2001, 580 p.
11. Kurz H.D. [Marx and the “law of value”: Critical appraisal on the occasion of his 200th birth anniversary]. *Voprosy Ekonomiki*, 2018, no. 11, pp. 27–49. (In Russ.) URL: <https://doi.org/10.32609/0042-8736-2018-11-27-49>
12. Bodrikov M.V. [Sraffian Theory of Value: An Intermediate Stage of the Return to the Classics]. *Terra Economicus*, 2018, vol. 16, no. 2, pp. 46–74. (In Russ.) URL: <https://doi.org/10.23683/2073-6606-2018-16-2-46-74>
13. Rassokha A.V., Shananin A.A. [Inverse problems of the analysis of input-output balances]. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 33, no. 3, pp. 39–58. (In Russ.) URL: <https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-03>
14. Al-Salih R., Habeeb A., Laith W.H. A Quantum Calculus Analogue of Dynamic Leontief Production Model with Linear Objective Function. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1234. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1234/1/012102>
15. Kramarov S.O., Pelikhov N.V., Sakharova L.V., Khramov V.V. [Modification of the Leontief model for description of regional economic clusters]. *Vestnik Universiteta*, 2019, no. 12, pp. 78–86. (In Russ.) URL: <https://doi.org/10.26425/1816-4277-2019-12-78-86>
16. Pavlova N.G. [Study of the continuous-time open dynamic Leontief model as a linear dynamical control system]. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equation*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 111–116. (In Russ.)
17. Von Neumann J. A Model of General Economic Equilibrium. *The Review of Economic Studies*, 1945, no. 13, iss. 1, pp. 1–9. URL: <https://doi.org/10.2307/2296111>

Conflict-of-interest notification

I, the author of this article, bindingly and explicitly declare of the partial and total lack of actual or potential conflict of interest with any other third party whatsoever, which may arise as a result of the publication of this article. This statement relates to the study, data collection and interpretation, writing and preparation of the article, and the decision to submit the manuscript for publication.