ISSN 2311-8733 (Online)
ISSN 2073-1477 (Print)

*Экономико-математическое моделирование*

# СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

**Рамзия Ризаевна ДУЖИНСКИ[a], Евгений Львович ТОРОПЦЕВ[b,•], Александр Сергеевич МАРАХОВСКИЙ[c]**

[a] доктор психологических наук, профессор,
Университет Нэшнл Льюис, Чикаго, Иллинойс, США
ramzia@aol.com

[b] доктор экономических наук, профессор кафедры прикладной математики и математического моделирования,
Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Российская Федерация
eltoroptsev@yandex.ru

[c] доктор экономических наук, профессор кафедры прикладной информатики,
Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Российская Федерация
marahov@yandex

• Ответственный автор

**История статьи:**
Принята 19.02.2016
Одобрена 09.03.2016

**УДК** 330.5.057.7
**JEL:** C00, C30, C61, P11

**Ключевые слова:**
устойчивость, затраты – выпуск, экономическая динамика

**Аннотация**

**Предмет.** В статье рассмотрены статическая устойчивость и динамические свойства макроэкономических систем.

**Цели.** Определить основные стратегические направления совершенствования экономико-математического моделирования в рамках исследования экономической динамики макросистем, обосновать возможности получения базовых таблиц «затраты – выпуск» для регионов, разработать концептуальную модель управления составляющими движения экономических систем и вариантов формализованного управления экономической динамикой.

**Методология.** Использованы методология «затраты – выпуск», теория дифференциальных уравнений, а также методы линейной алгебры и прикладного нелинейного программирования.

**Результаты.** Предложен метод прямого управления собственными значениями матрицы состояния динамической модели межотраслевого баланса, сформулированы необходимые и достаточные условия работоспособности данного метода, обоснован алгоритм для оценки степени экономического роста. Результаты исследования могут быть использованы при принятии экономических решений на уровне регионов и страны.

**Выводы.** Сделан вывод о том, что в условиях современной России управление динамикой и ростом экономики, а также изменение ее структуры возможны только на основе кейнсианской методологии.



Для предотвращения кризисных явлений, происходящих в различных экономических системах, неизбежно приходится решать задачи регулирования экономических процессов, а также разрабатывать инструменты их анализа и обоснования. Тема регулирования и управления связана в первую очередь с государственным регулированием и управлением, а методология «затраты – выпуск» и межотраслевой анализ являются основными инструментами анализа на всех уровнях производственно-технологической иерархии (от предприятия до страны в целом) [1–5].

На основе базовых таблиц «затраты – выпуск» (ТЗВ) и межотраслевых балансовых моделей (МОБ) можно решить задачи, связанные с оценкой качества переходных процессов и устойчивости на основе развитого математического аппарата теорий: дифференциальных уравнений и линейной алгебры, систем и системного анализа, исследования операций, автоматического управления. Исследования подобного рода целесообразно вести постоянно.

Во исполнение распоряжения Правительства РФ от 14.02.2009 № 201-р в декабре 2015 г. в Правительство РФ были представлены базовые ТЗВ за 2011 г. В 2016 г. ТЗВ будут доступны всем, кто в них заинтересован. По мнению авторов, это непременно вызовет всплеск научно-исследовательской и публикационной активности в области межотраслевого анализа, появятся новые подходы к повышению конкурентоспособности экономики, к решению проблем модернизации и импортозамещения на базе структурных моделей. Также вполне вероятно, что будут реализованы два направления совершенствования экономико-математического моделирования.

* Статья подготовлена при финансовой поддержке РГНФ. Грант № 16-02-00091(а) «Моделирование и управление экономической динамикой сложных систем».

*Первое направление* связано с повышением качества отечественной статистики во временном, ассортиментном и количественном отношении. Следует отметить, что базовые ТЗВ имеют четырехлетний период разработки. Это долгий срок. Количественная оценка межотраслевых взаимодействий в современной российской экономике должна быть более актуальной и публиковаться ежегодно. Однако в своем интервью зам. руководителя Росстата И.Д. Масакова называет этот срок технологически обоснованным [6].

Полгода из указанного времени занимает федеральное статистические наблюдение, обработка его итогов требует еще 4–5 мес. Полгода резервирует Федеральная служба государственной статистики на получение данных от Министерства финансов, налоговой и таможенной служб. Рабочие версии ТЗВ планировалось получить в 2013 г., при этом ожидаемые невязки и дисбалансы в таблицах ресурсов и использования товаров и услуг составляют сотни процентов. Весь 2014 г. отводился для корректировки данных на основе глубокого и всестороннего анализа качества представленной информации, ее экономического содержания и полноты охвата экономических операций [6]. То есть была запланирована большая работа по выполнению итераций, минимизирующих дисбалансы. При этом анализ данных неформален и опирается при выполнении в том числе и на экспертные оценки логичности и объективности собранной информации.

Во-первых, следует отметить нерегулярность разработки ТЗВ и МОБ за последние 25 лет, а также накопленные за это же время нигилизм, высокомерие, научный остракизм и жесткость позиции в их отношении. Метод «затраты – выпуск» отнесли к категории устаревших (методу практически 90 лет), сложных и громоздких, а потому непонятных и бесперспективных. Проще вычислить коэффициент корреляции, не обращая внимание на ее возможную ложность, или подняться до теории индексов и вычислить дефляторы. Между тем библиометрический анализ прямого и косвенного влияния метода на другие научные дисциплины дает количественное подтверждение того, что теория «затраты – выпуск» стала мультидисциплинарной областью [5, 7].

Во-вторых, Росстат и его региональные отделения приложили известные усилия по разъяснению смысла и значения упомянутых ранее федеральных статистических наблюдений. Бухгалтерские и планово-финансовые службы во время заполнения форм наблюдения получают дополнительные аналитические возможности по группировкам и учету расходов на своих предприятиях. Но в то же время статистические наблюдения связаны с раскрытием финансово-экономической информации. Предприятия с опаской воспринимают всякие статистические обследования и в рамках своих возможностей ищут и находят пути, чтобы формально выполнить нормативные требования по финансовой и статистической отчетности. В связи с этим в допускаемых аудитором пределах оптимизируются даже бухгалтерские балансы. По мнению авторов, степень детализации элементов затрат, необходимая для федерального статистического наблюдения, может затрагивать чувствительную для предприятия информацию, которую нежелательно раскрывать перед органами статистики. Например, структура затрат может содержать информацию о технологиях для служебного пользования, о неразглашаемой динамике и географии сбыта, сложившихся производственных связях, других элементах логистических цепочек, которые не хотелось бы афишировать. В связи с этим предприятие неминуемо и умышленно внесет недостоверные данные в формы наблюдения, что отразится на качестве ТЗВ и степени доверия к ним. Поэтому возникает необходимость их балансировки, то есть подгонки. Более того, квалификация работников экономических служб на малых и средних предприятиях часто бывает низкой, как и уровень зарплаты. Этим и обусловлено недостоверное отражение операций в бухгалтерских книгах. Таким образом, статистика не в состоянии проследить за всеми участниками и видами экономической деятельности, поэтому в каждой экономике присутствуют ненаблюдаемый, теневой и нелегальный секторы. Все это приводит к внесению случайных, систематических и умышленных ошибок в официальную статистику, что порождает неопределенность моделирования.

Качество и актуальность статистики в России были и остаются низким, начиная с 1930-х гг. после НЭПа. Академик В.С. Немчинов охарактеризовал уровень обеспеченности экономических исследований в СССР как «голодный статистический паек» [8, 9].

Во многом такое положение сохраняется и в настоящее время. И лучшие экономико-математические модели-задачи, модели-имитации и их комплексы, самые передовые теоретико-методологические построения и подходы, нацеленные на создание реальной системы оптимального функционирования экономики, будут иметь нулевую эффективность и даже принесут вред, столкнувшись со статистическими данными, имеющими слабое отношение к истинному положению дел в стране и регионах и представляющими собой результаты счета или досчета, а во многих случаях просто результат погрешностей счета [8].

*Второе направление* совершенствования экономико-математического моделирования заключается в разработке мощных модельно-методических комплексов, объединяющих возможности моделей-задач (МОБ), и имитационных моделей для решения проблем долгосрочного социально-экономического развития, задач кратко- и среднесрочного программирования, планирования, прогнозирования и управления экономическими системами, к которым относятся системы управления базами данных и геоинформационные системы.

Такая программно-техническая база позволит резко сократить сроки разработки и качественно улучшить базовые ТЗВ. Движение товаров и услуг непременно сопровождается платежными документами во исполнение требований налогового законодательства и бухгалтерского учета. Вместе с тем современные информационные и телекоммуникационные технологии, методы классификации и распознавания образов позволяют разработать кодификатор товаров и услуг в десятки миллионов наименований. Таким образом, продукты и услуги оказываются однозначно идентифицированными в базах данных, если упомянутые платежные документы будут снабжены кодом продукта или услуги. В результате вся система национальных счетов, включая ТЗВ, окажется автоматизированной, а невязки в «черновых» версиях ТЗВ не составят сотни процентов, как в настоящее время.

Следует отметить, что есть возможность получения ТЗВ и МОБ для регионов. Для этого необходимо совершенствование законодательства, чтобы навести порядок в учете затрат и производства продукции мультитерриториальных компаний, определить сальдо внешнеторгового обмена, что позволит математически замыкать по потреблению модели открытых экономик регионов. В конце концов, экономика Нидерландов, например, так же открыта в отношении экономики стран Евросоюза, как экономика Ставропольского края в отношении окружающих его субъектов РФ. И это не мешает Нидерландам ежегодно разрабатывать ТЗВ [10].

Данное исследование посвящено проблеме экономической динамики и устойчивости экономических систем, которая не может эффективно решаться на базе набора моделей, полученных с шагом по времени на основе статического МОБ вида:

$$X = AX + Y, \qquad (1)$$

где $X$ – вектор валовых выпусков;

$Y$ – вектор конечного спроса;

$A$ – матрица коэффициентов прямых затрат.

Для исследования динамических систем необходима динамическая модель [2], которую можно представить в виде системы дифференциальных или алгебро-дифференциальных уравнений (в случае вырожденности матрицы $B$):

$$X(t) = AX(t) + B \cdot dX(t)/dt + Y(t),$$
$$X(0) = X(0). \qquad (2)$$

где $X(t)$ – вектор валовых выпусков;

$Y(t)$ – вектор конечного спроса;

$A, B$ – матрицы коэффициентов прямых затрат и приростных фондоемкостей соответственно.

Для полноценного анализа качества переходных процессов в экономических системах, их устойчивости, степени (или темпа) экономического роста, других показателей, характеризующих собственные (внутренние) динамические свойства, необходимо не введение принципа мультипликатора-акселератора в модель (1), как рекомендуют некоторые эксперты [11], а использование модели (2), которая естественным образом подходит для решения многочисленных задач устойчивости. Это значит, что необходимо построение не только матрицы $A$, но и матрицы $B$, которая не разрабатывается.

Вместе с тем одновременно с таблицами «затраты – выпуск» за 2011 г. предполагается разработать показатели затрат труда и капитала по видам экономической деятельности (ВЭД) [6]. Так почему бы не пойти дальше и не построить матрицу приростных фондоемкостей? Но в настоящее время исследователи должны получать ее самостоятельно. Если в распоряжении исследователя есть качественная и актуальная модель (2), то решение задач устойчивости и экономического роста возможно с использованием всего богатейшего арсенала методов ее анализа, предложенных естественными и техническими науками. Достаточно вспомнить, что феномену устойчивости посвятили свои исследования П.-С. Лаплас, Ж.-Л. Лагранж, Ж.А. Пуанкаре, А.М. Ляпунов, В.И. Арнольд, А. Гурвиц, Э.Д. Раус, А.И. Михайлов, Г. Найквист, У.Р. Эшби, С.П. Тимошенко, М.А. Тайц, Г.С. Бюшгенц, Л.В. Докучаев, Л. Вальрас, А. Маршалл, Дж. Хикс, П. Самуэльсен, К. Эрроу, Ф. Хан, В.В. Леонтьев, К. Ланкастер и другие ученые. Модель (2) позволяет объединить чисто экономические подходы к устойчивому развитию, основанные на теории максимального потока совокупного дохода (ее авторы – Дж. Хикс и Э. Линдаль), так и классические математические методы исследования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой подход с методологической точки зрения следует отнести к числу системных, то есть используемых для исследования общих свойств сложных объектов. Сам по себе этот подход не создает новых инструментов и средств для решения конкретных экономических задач, но позволяет целенаправленно применять различные методы, дающие возможность интегрированно, с наиболее общих позиций оценить системные свойства экономики.

Макроэкономика – это сложная система, и необходимым условием ее существования является устойчивость, прежде всего статическая. Нарушение устойчивости снижает экономические возможности страны, а в долгосрочном периоде ведет к деградации, разложению, распаду, угрожает ее существованию. С 2011 г. экономика России находится в неустойчивом состоянии. Экономике такой структуры не помогут даже баснословные цены на «черное золото». По данным Росстата, в 2011 г. нефть подорожала на 40% (с 77 до 108 долл. США за баррель), а объем продаж товаров длительного пользования снижался, инвестиционные процессы сворачивались, промышленное производство тормозило рост. ВВП России, снизившись в 2009 г. на 8,5%, вырос в 2011 г. на 4,3%, а потом рост упал до 3,4% и дошел до 0%. В 2014–2015 гг. и по настоящее время экономика России находится в зоне неустойчивости вблизи границы этой зоны.

Следует отметить, что чем сложнее система, тем сильнее зависимость ее поведения от внутренних или собственных динамических свойств (СДС) по сравнению с реакцией на внешние возмущения. СДС определяются в основном параметрами и связями внутри системы. Нелинейные свойства системы могут проявляться неоднозначно при различных внешних воздействиях, но только не в режиме реального времени и даже не на среднесрочных временных горизонтах. Так работают инерционности экономических систем. Это дает основание использовать модель (2) для оценки СДС на основе решения так называемой полной проблемы собственных значений и собственных векторов [12–14], отражающих структурные и функциональные отношения между представленными в модели отраслями или ВЭД.

Реальные условия функционирования экономики, конечно же, отличаются от того, что предлагает модель (2). Экономика испытывает флуктуации режима, причем многообразные и непостоянные. Ее способность сохранять устойчивость в режиме конкретной модели (2), в интервале условий функционирования (случайных флуктуаций) и более глубоких изменений режима является одним из важнейших свойств режимной надежности экономики. Способность к устойчивости обобщенно может быть охарактеризована таким показателем ее запаса, как степень экономического роста, которая равна значению самого правого вещественного собственного числа матрицы модели (2), замкнутой по потреблению и приведенной к нормальной форме Коши. Способность сохранять устойчивость может служить одной из мер эффективности экономики. Итак, предлагается рассмотреть правый по расположению на комплексной плоскости вещественный корень характеристического уравнения указанной модели.

Надежность функционирования экономики может быть обеспечена только при ее достаточной управляемости (или регулируемости) за счет инвестиционных, фискальных и иных воздействий, определяющих возможность целенаправленного синтеза и поддержания динамических свойств системы. Технически способность быть устойчивой и управляемой – это взаимозаменяемые свойства сложной системы.

Для замыкания модели (2) необходимо выразить вектор конечного спроса $Y(t)$ через другие переменные модели. Допустим, что для выпуска единицы продукта в рассматриваемый период времени требуется количество труда $li$, потребленного $j$-м ВЭД. Тогда, чтобы произвести весь валовой выпуск за тот же период, надо будет затратить $\sum ljxj(t, j-1,2),\dots n$ единиц труда. Если ввести норму потребления как единицу труда продукта $i$-го ВЭД в виде $\beta i$, то все потребление можно представить следующим образом:

$$Yi(t)=\beta i \sum ljxj(t), i, j=1,2,\dots n, \qquad (3)$$

или в матричном виде

$$Y(t)=QX(t), \qquad (4)$$

где $Q$ – матрица размерностью $n \cdot n$, строка которой задается формулой (3).

Тогда модель (2) примет следующий вид:

$$X(t)=AX(t)+B \cdot dX(t)/dt+QX(t),$$

$$X(0)=X(0). \tag{5}$$

Если принять гипотезу о том, что все ВЭД фондообразующие, что на самом деле и происходит, то форма Коши будет иметь следующий вид:

$$dX(t)/dt=B^{-1}(E-A-Q)X(t)=GX(t),$$
$$X(0)=X(0), \tag{6}$$

где $E$ – единичная матрица;

$G$ – матрица состояния замкнутой системы.

Утверждение о том, что матрица $B$ все-таки вырождена, из-за чего был утрачен интерес к модели (2), можно опровергнуть.

Для этого модель (6) необходимо преобразовать следующим образом:

$$BpX(t)+FX(t)=0, \tag{7}$$

где матрица $F=A+Q+E$.

Допустим, что балансовая модель (7) содержит $m$ фондообразующих и $n$ нефондообразующих отраслей, то есть имеет размерность $(n+m)$. Тогда вектор отраслевых выпусков можно представить следующим образом:

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

где $X_1 \in R^m, m$ – число дифференциальных уравнений модели (7);

$X_2 \in R^n, n$ – число алгебраических уравнений модели.

Сама модель представляется как система $m+n$ дифференциальных и алгебраических уравнений, содержащая $m$ интегрируемых (не могут претерпевать скачкообразных изменений) и $n$ неинтегрируемых переменных (могут изменяться скачком):

$$B_1 p X_1+B_2 p X_2+F_1 X_1+F_2 X_2=0, \tag{8}$$

$$F_3 X_1+F_4 X_2=0. \tag{9}$$

В уравнениях системы (8), (9)

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix},$$

где блоки матриц $B$ и $F$, $B_1, B_2, F_1, F_2, F_3, F_4$ имеют размерности $(m,m),(m,m),(m,n),(n,m),(n,n)$, соответственно, $p=d/d(t)$ – оператор дифференцирования по времени.

Между интегрируемыми и неинтегрируемыми переменными существуют алгебраические связи, устанавливаемые уравнением (9). Следует отметить, что традиционная практика составления МОБ предполагает выполнение неравенства $n \gg m$, в пределе оставляя фондообразующими только «Строительство» и «Машиностроение». Но для разработки матрицы приростных фондоемкостей это как неверно, так и вредно, потому что не станет организация, имеющая аренду легковых автомобилей в качестве основного ВЭД (группировка 71.10 ОКВЭД) указывать в отчетности дополнительно группировку 45 «Строительство», хотя установкой и монтажом оборудования для отопления и вентиляции, лифтов и эскалаторов, электрооборудования, систем электро-, газо- и водоснабжения, оконных и дверных блоков и т.п. заниматься в своих производственных зданиях будет. Формально ОКВЭД требует отнести сказанное к группировке 45, но на практике сплошь и рядом этого не происходит.

Если считать выполненным неравенство $n \gg m$, то следует, что все компоненты валового выпуска, не относящиеся к строительству и машиностроению, физически могут меняться скачком, а экономическая динамика определяется только этими двумя группировками ОКВЭД. Это не означает, что экономика имеет интегрируемые составляющие движения только в двух группировках. Чтобы правильно отобразить экономическую динамику, матрицу надо разрабатывать заполненной, как минимум выполняя неравенство $n \gg m$, причем по возможности с элементами имитационного моделирования.

Дальнейшие преобразования для получения формы Коши очевидны. Считая матрицу $F_4$ уравнения (9) неособенной, подвектор $X_2$ можно выразить через подвектор $X_1$ следующим образом:

$$X_2=-F_4^{-1} F_3 X_1$$

и исключить $X_2$ из уравнения (8)

$$(B_1-B_2 F_4^{-1} F_3) pX_1=-(F_1-F_2 F\,4^{-1} F_3) X_1.$$

Теперь окончательная форма Коши примет следующий вид:

$$pX_1=G_1 X_{1,} X_1(0)=X(0), \tag{10}$$

$$G_1=-(B_1-B_2 F_4^{-1} F_3)^{-1}(F_1-F_2 F_4^{-1} F_3).$$

В Статистическом словаре содержится утверждение о том, что приростные фондоемкости $bij(t)$ равны отношению количества $i$ -й продукции, вошедшей в прирост фондов (основных и оборотных) $j$ -й отрасли, к приросту годовой продукции этой $j$ -й отрасли $\Delta X_j$ . Указание «основных и оборотных» вообще исключает вырожденность матрицы $B$, делая рассматриваемую модель свободной от приписываемых ей недостатков.

Динамические свойства экономики определяются матрицей $G$ системы (6) либо матрицей $G_1$ системы (10) (в случае вырожденности матрицы $B$ ). Указанные матрицы порождают характеристическую матрицу $D(p)=pE-G$ или $D(p)=pE-G_1$ соответственно. Определитель $detD(p)=d_0+d_1p+d_2p^2+...+d_np_n$ для модели (6) – характеристический полином, корни которого тождественно равны собственным значениям матрицы состояния $G$ и дают характеристики СДС сложной экономики. Расчет собственных значений в настоящее время не представляет проблем – в вычислительные математические среды включены эффективные модули решения полной проблемы собственных значений, основанные на элементарных устойчивых ортогональных преобразованиях матриц [15–17].

Каждая составляющая движения возбуждается собственным значением матрицы преобразования переменных состояния, поэтому их число равно дифференциальному порядку модели. Тогда решение задачи Коши будет иметь следующий вид:

$$X(t)=\sum_i C_i e^{p_i t}+\sum_k (C_{k0}+C_{k1}t^1+...C_{kr}t^r)e^{p_r t}, \qquad (11)$$

где $X(t)$ – вектор переменных состояния;

$C...$ – столбцовые матрицы постоянных интегрирования, определяемые начальными условиями;

$p_i$ – простые (вещественные или комплексные) корни;

$p_r$ – $r$ -кратные корни.

Для каждой интегрируемой переменной коэффициенты $c_i$ и $c_k$ , то есть элементы соответствующих матриц, будут различны. Однако поведение всех составляющих вектора $X(t)$ будет определяться вещественными (вида $p=\alpha$ ) и комплексно-сопряженными (вида $p_{ij}=\alpha\pm j\omega$ ) корнями характеристического уравнения. Например, если среди корней имеется $m$ действительных простых, $n$ комплексных простых и $r$ действительных кратных, то выражение для решения примет следующий вид:

$$X(t)=\sum_m C_m e^{\alpha} m^t+\sum_n C_n e^{\alpha} n^t \sin(\omega_n t+n) + \sum_k (C_{ko}+C_{k1}t^1+C_{kr}t^r)e_r^{\alpha t}. \qquad (12)$$

Для устойчивости технических систем необходимы отрицательные значения действительных корней и вещественных частей комплексно-сопряженных пар, что означает принадлежность всего спектра собственных значений матрицы состояния левой полуплоскости комплексной плоскости. Тогда можно получить устойчивую систему и затухающие переходные процессы. В последнем слагаемом формулы (12) модуль экспоненты растет быстрее, чем модуль скобки, поэтому $X(t)\to 0$, когда все корни имеют отрицательные действительные части. При этом вещественная часть самого правого корня (неважно, комплексного или вещественного) называется степенью устойчивости системы. Оценка запаса устойчивости экономических систем имеет ряд особенностей.

1. Принадлежность спектра корней левой полуплоскости (физические и технические системы устойчивы по Ляпунову) свидетельствует о неустойчивом поведении экономики, снижении валового производства, об уменьшении масштаба экономики.

2. Самоподдерживающийся экономический рост возможен только в случае расположения одного из действительных корней в правой полуплоскости. Значение этого корня, которому соответствует положительный собственный вектор, определяет степень экономического роста.

3. Растущей экономике соответствует матрица состояния с отличными от нуля элементами, обладающая свойством положительной обратимости, которую можно представить следующим образом:

$$(B^{-1}(E-A-Q))^{-1}=(E-A-Q)^{-1}B=G^{-1}>0.$$

Также для роста экономики достаточно одного положительного вещественного собственного числа и соответствующего ему положительного собственного вектора для матрицы общего вида.

Особенности 1 и 2 очевидны, а особенность 3 требует пояснений. Для этого необходимо рассмотреть экономический рост с темпом $p$

$$X(t)=pX(t-1), p>0.$$

Тогда, например, траекторию сбалансированного роста можно представить в следующей форме [13]:

$$X(t)=p^t X(0).$$

Уравнение такой траектории следует из формулы (6):

$$X(t)=G^{-1}pX(t), p=d/dt,$$

причем рост выпуска обеспечит только матрица, удовлетворяющая особенности 3. Тогда в соответствии с известной в линейной алгебре теоремой Перрона – Фробениуса [12, 14, 17] $G^{-1}$ имеет положительное собственное число, равное ее спектральному радиусу $r(G^{-1})$, которому соответствует единственный положительный собственный вектор, задающий пропорции инвестиционных усилий в экономике. Тогда матрица состояния $G$ модели (6) (так же, как и матрица $G_1$ модели (10) есть матрица общего вида, имеющая одно положительное собственное число, только уже минимальное по модулю, которое назвали степенью экономического роста, обозначив $\alpha_{\max}$ за его нахождение в показателе степени экспоненты. Остальные собственные числа должны принадлежать левой полуплоскости.

Проблема мониторинга $\alpha_{\max}$ и управления им в результате реализации той или иной экономической политики выходит на первый план. Фискальные, таможенные, тарифные органы, а также финансово-кредитная подсистема выступают при решении этой задачи в качестве безынерционных регуляторов от экономического блока правительства. Инерционные сигналы управления, то есть сигналы длительного действия, формирует инвестиционная политика. Эффективность всей совокупности экономических решений необходимо оценивать по их влиянию на $\alpha_{\max}$. При этом прочие выгоды и целесообразность следует отнести к числу второстепенных.

Составляющие движения, характер которых определяют собственные значения матрицы состояния замкнутой модели, можно условно разделить на хорошо и плохо управляемые, причем плохая управляемость не всегда свидетельствует о неудовлетворительном качестве сигнала управления. Она может являться следствием фундаментальных свойств экономики. Примерами таких свойств могут служить цикличность воспроизводственных процессов (например, в сельском хозяйстве в течение года), относительно высокие значения постоянных времени переходных процессов при проведении структурных реформ и т.п. Это позволяет сделать вывод о том, что управлять следует только обоснованно выбранными компонентами движения, прежде всего $\alpha_{\max}$.

Вектор варьируемых параметров, привлекаемых для управления устойчивостью, может иметь произвольную длину в рамках используемых моделей (6) или (10) и включать любые их коэффициенты. Если формально учесть регулирование матрицей $\Delta G$, то вместо (6) можно записать равенство

$$dX(t)/dt=(G+\Delta G)X(t)=G_r X(t), X(0)=X_0, \qquad (13)$$

где матрица с учетом регулирования $G_r$ будет иметь желаемое расположение характеристических корней в комплексной плоскости: $\alpha_{\max}$ принадлежит правой полуплоскости, прочие корни – левой полуплоскости. Для достижения этого результата есть множество способов. Один способ предусматривает использование корней характеристического уравнения, решающего задачу их расположения в комплексной плоскости за один шаг. Для этого необходимо сделать два справедливых допущения.

1. Пусть $L$ – вектор варьируемых параметров размерности $S$. Нарушающие линейность модели приращения вектора варьируемых параметров $\Delta L$ на кратко- или даже среднесрочном лаге модернизации экономики невозможны.
2. Желаемые приращения вещественных частей корней содержит вектор $\Delta\alpha$ размерности $m$, связанный с $\Delta L$ уравнением прогноза достижения этого результата

$$D\Delta L=\Delta\alpha, \qquad (14)$$

где $D$ – матрица чувствительностей, элементами которой являются коэффициенты чувствительности $\delta\alpha_i/\delta L_j$ вещественных частей корней к варьируемым параметрам $L_j$, вычисляемые по формуле [13]

$$\delta\alpha_i/\delta L_j=Re(\delta\alpha_i/\delta L_j)= Re(V_i^T(\delta G/\delta L_j)U_i)/(V_i^T U_i), \qquad (15)$$

где $U_i, V_i$ – собственные векторы матриц $G$ и $G^T$.

Также возможны следующие варианты управления экономической динамикой:

- задание обоснованно экономическим ростом желаемой степени с сохранением остальных составляющих движения неизменными, когда вектор имеет только одну ненулевую компоненту – модальное управление;

- задание степени роста и уровня демпфирования других управляемых форм движения;
- реализация квазимодального управления заданной группой управляемых движений.

Выбор вектора варьируемых параметров при этом есть достижение компромисса между экономической обоснованностью его состава, вычислительными возможностями и оценками чувствительности по формуле (15).

При решении уравнений прогноза (14) практически никогда размерности векторов $\Delta Y$ и $\Delta\alpha$ совпадать не будут: $S>m$ либо $S<m$ и матрица $D$ будет прямоугольной. В части анализа такой задачи наиболее мощным вычислительным средством является сингулярное разложение (SVD), которое имеет давнюю историю, так как самое давнее известное авторам его описание содержится в исследованиях В.В. Воеводина [14]. Фундаментальные результаты по этой проблеме опубликованы в других работах [13], а также получены в рамках Национальной программы тестирования математического обеспечения США в 1970-х гг. SVD – это также название программного модуля, содержащегося в пакете EISPACK [16] и включенного в состав математической вычислительной среды MATLAB [17].

Сингулярное разложение основано на элементарных, устойчивых ортогональных преобразованиях и позволяет вычислить решение уравнений прогноза с минимальной нормой, обеспечивающей вектору невязки

$$r=D\Delta L-\Delta\alpha, \qquad (16)$$

наименьшую (в некоторых случаях нулевую) длину $(r,r)\rightarrow\min$.

Кроме общепринятых оснований определение решения с минимальной нормой важно потому, что чем меньше длина $\Delta L$, тем более точной является модель линейного приближения (14). Более того, можно даже пойти на уменьшение нормы $\Delta L$ по сравнению с оптимальным значением за счет небольшого возрастания длины вектора невязки (16). Для этого есть ряд оснований.

Допустим, что матрица $D$ размерности $m\cdot S$ имеет ранг $p$. Требуется определить вещественный вектор $\Delta L$, минимизирующий длину невязки (16). Теоретически возможны шесть случаев:

1) $p=m=S$;

2) $p<m=S$;

3) $p=S<m$;

4) $p<S<m$;

5) $p=m<S$;

6) $p<m<S$.

Для решения задачи о наименьших квадратах необходимо использовать сингулярное разложение матрицы $D$

$$D=U\sum V^T, \qquad (17)$$

в котором $U$ и $V$ – ортогональные матрицы размерностей $m\cdot m$ и $S\cdot S$ соответственно;

$\sum$ – диагональная матрица размерности $m\cdot S$,

$\sum=diag(\sigma 1,\sigma 2,\ldots,\sigma S)$, $\sigma i$ – неотрицательные квадратные корни из собственных значений DTD, называемые сингулярными числами $D$.

Вычисляемые $\sigma i$ располагаются в порядке убывания таким образом, что для $1\le i\le p$ значения $\sigma i>0$, а для $p<i\le\min(m\cdot S)\delta i=0.$ Тогда для невязки (16) формула примет следующий вид:

$$\begin{gathered} r=D\cdot\Delta L-\Delta\alpha=(U\sum V^T)\Delta L-\Delta\alpha, \\ \acute{r}=\sum\Delta\acute{L}-\Delta\acute{\alpha}-U^T r, \\ \Delta\acute{L}=U^T\Delta L,\Delta\acute{\alpha}=V^T\cdot\Delta\acute{\alpha}. \end{gathered} \qquad (18)$$

Из линейной алгебры известно [13, 17–20], что умножение на ортогональные матрицы не изменяет длину вектора и угол между двумя векторами. Поэтому для соответствующих скалярных произведений формула примет следующий вид:

$$(\acute{r},\acute{r})=(r,r),(\Delta\acute{L},\Delta\acute{L}),(\Delta L,\Delta L),(\Delta\acute{\alpha},\Delta\acute{\alpha})=(\Delta\alpha,\Delta\alpha).$$

В зависимости от значений $p,m,S$ компоненты вектора $\acute{r}$ группируются следующим образом:

$$r\acute{j}=\delta\acute{j}\cdot\Delta L\acute{j}-\Delta\alpha\acute{j},1\le j\le p; \qquad (19)$$

$$r\acute{j}=0\cdot\Delta L\acute{j}-\Delta\alpha\acute{j},p\le j\le\min(m\cdot S); \qquad (20)$$

$$r\acute{j}=-\Delta L\acute{j},\min(m\cdot S)<j\le m, \qquad (21)$$

в чем можно убедиться непосредственным умножением на матрицу $\sum$ в формуле (18).

В группы уравнений (20) и (21) задача имеет единственное решение. Элементы вектора невязки $r$ и вектора $\acute{r}$ равны нулю

$$\Delta L\acute{j}=\Delta\alpha\acute{j}/\delta j,\Delta L\acute{j}=V\cdot\Delta L\acute{j}, \qquad (22)$$

что отвечает обычному решению системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей и ненулевым определителем.

Задача наименьших квадратов однозначно решается и для случая 3, где помимо уравнений группы (19) появляются составляющие $\bar{r}_j$, относящиеся к группе уравнений (21), что приводит в общем случае к отличной от нуля невязке.

Случаи 2, 4, 6 предполагают наличие отличных от нуля элементов $r\acute{j}$ в группе уравнений (20), что делает решение задачи неоднозначным. Это определяется тем, что $\Delta L\acute{j}$ для уравнений группы (20) могут выбираться произвольно. В частности, они могут быть нулевыми для получения решения с минимальной нормой. При этом величины $r\acute{j}$ не изменяются.

В случаях 5 и 6 неоднозначность возникает дополнительно вследствие того, что величины $\Delta L\acute{j}$ при $m < j \le S$ вообще не влияют на длину вектора невязки и тоже могут выбираться нулевыми.

Убывающие значения сингулярных чисел дают растущие значения компонент $\Delta L\acute{j}$ по формуле (22). В конце концов величины $\delta j$ могут стать соизмеримыми со статистической ошибкой данных. Тогда вследствие деления на эти малые величины составляющие решения $\Delta L\acute{j}$ и $\Delta L j$ могут быть сильно зашумлены.

Регуляризация задачи для получения устойчивого решения заключается в исключении составляющих решения, отвечающих малым $\delta j$. Исследователи считают, что ключ к правильному использованию сингулярного разложения – это введение границы $\tau$, отражающей точность исходных данных и используемой плавающей арифметики [18, 20]. Это значит, что значения сравниваются с величинами $\delta j$ для определения их пригодности в формировании решения. Определяемые с большой ошибкой компоненты вектора $\Delta L\acute{j}$ следует обнулить, то есть провести декомпозицию задачи вида:

если $\delta_j \ge \tau, \rightarrow \Delta L_j = \Delta \alpha_j / \delta_j,$ (23)

если $\delta_j < \tau, \rightarrow \Delta \alpha_j = 0, j = 1, 2, \ldots S,$ (24)

устранив возникающую неоднозначность. Смысл такой декомпозиции задачи в том, чтобы поиск решения в соответствии с формулой (22) был выполнен в подпространстве только значимых сингулярных чисел, для которых выполняется неравенство $\delta_j \ge \tau$.

Если число обусловленности матрицы классически определяется отношением

cond ($D$) = σ max / σ min,

то в данной ситуации вводится понятие эффективного числа обусловленности, которое уменьшается, становясь равным

cond ($D$) = σ max / τ.

Можно говорить и об эффективном ранге матрицы $D$, равном количеству σ$j$, превышающих границу τ.

По практике экономических исследований значение τ можно задавать только экспертным путем. Поэтому программные реализации вычислительных процедур должны выбирать решение системы исходя из компромисса между ненадежностью определения вектора $\Delta L$ и возрастающими невязками $r$. Меньшая норма $\Delta L$, несомненно, предпочтительнее, так как позволяет оставаться в рамках модели линейного приближения. Исходная же задача о наименьших квадратах нелинейна, как в данном исследовании.

После вычисления сингулярных чисел матрицы $D$ и обнуления части их значений в соответствии с критерием (24) решение системы (14) для $j$-го параметра принимает вид:

$$\Delta L_j = \sum_l \left(\sum_i u_{il} \cdot \Delta \alpha_i\right) V_{jl} / \delta l, l = 1, \ldots S; i = 1, \ldots m. \quad (25)$$

Очевидна нелинейность связи приращений степени экономического роста и декрементов затухания других составляющих движения с варьируемыми параметрами. Поэтому получаемые $\Delta a_i$ при требуемых $\Delta L_j$ являются прогнозом на основе линейной динамической модели межотраслевого баланса. Вообще говоря, мера доверия к прогнозу растет при уменьшении $\Delta a_i$.

Следует отметить, что методика расчета коэффициентов матрицы $B$ модели (2) и ее преобразований основана на статистических данных, учитывающих разницу между введенными и выбывшими основными фондами за год, а также движение основных средств внутри основных видов экономической деятельности. Основным упрощающим предположением является то, что значительная доля инвестиций $\Delta I$ превращается в основные производственные фонды предприятий, которые обеспечивают прирост валового выпуска $\Delta X$ в том же году. Тогда в качестве первого приближения можно получить диагональную матрицу $B$ делением элементов вектора инвестиций на соответствующие приращения валовых выпусков

$$B_j = b_{jj} = \Delta I_j / \Delta X_j,\ j = 1, \ldots n. \quad (26)$$

Внедиагональные элементы в матрице $B$ появляются в результате выполнения итерационных процедур балансировок модели. Так как ВЭД и отрасли – взаимозаменяемые понятия, известны следующие показатели:

$\Delta I_{ij}$ – расходы отрасли с номером $j$ на основные производственные фонды (ОПФ), произведенные отраслью с номером $i$;

$P_j$ – производственная мощность отрасли $j$ как стоимость ее продукции в текущих ценах;

$d_{ij}$ – годовая норма амортизации ОФП, использующихся в отрасли $i$ и произведенных в отрасли $j$;

$R_j$ – годовая норма изменения производственной мощности отрасли $j$;

$S_{ij}$ – стоимость ОПФ в текущих ценах, произведенных в отрасли $i$ и эксплуатируемых отраслью $j$ [11].

Тогда приростная фондоемкость вводится отношением

$$b_{ij} = S_{ij} / P_j. \quad (27)$$

Суммирование по индексу $i$ дает общий капитальный коэффициент отрасли $j$, то есть

$$B_j = \sum_i \left(S_{ij} / P_j\right). \quad (28)$$

В целом расходы составят

$$\Delta I_{ij} = S_{ij} d_{ij} + S_{ij} R_{ij} + S_{ij}\left(d_{ij} + R_j\right),$$

а для приростной фондоемкости с учетом (27), получится

$$B_{ij} = \Delta I_{ij} / \left(\left(d_{ij} + R_j\right) P_j\right). \quad (29)$$

Во-первых, несложный анализ формул (27) – (29) дает возможность выяснить, что, располагая ограниченным статистическим материалом, можно сформировать матрицу $B$ в своих моделях как диагональную, размещая на диагонали результат (29) – общий капитальный коэффициент отрасли на нулевой итерации. Остальные изменения элементов $B$ происходят в результате балансировок, которые представляют собой сложную оптимизационную задачу.

Во-вторых, из формулы (29) следует, что величины $b_{ij}$ могут быть и отрицательными, что определяется поведением слагаемого $R_j$ в знаменателе. Что же касается непосредственно выражения (29), то отрицательные значения скобки $\left(d_{ij} + R_j\right)$ получаются при сокращениях производственных мощностей отраслей, превышающих норму амортизации их ОПФ. А для того, чтобы иметь положительные $b_{ij}$, необходимо иметь устойчиво расширяющуюся экономику, для которой выполняется неравенство $\left(d_{ij} + R_j\right) > 0$.

В-третьих, из содержания и экономического смысла показателя $\Delta I_{ij}$ следует, что расходы на ОПФ несут все отрасли, а значит вероятность выrожденности матрицы приростных фондоемкостей $B$ (нулевые строки) ничтожно мала.

Вычислительный пример построен по данным кратких ТЗВ, размещенных на официальном сайте Росстата и охватывает 16 разделов ОКВЭД от А до Р. На рис. 1 представлена динамика выпуска трех разделов ВЭД с наибольшими объемными показателями.

Следует отметить, что растущий характер кривых вовсе не означает экономического роста – на рис. 1 отражены компоненты номинального ВВП. Реальный ВВП, который определяется делением номинального на общий уровень цен соответствующего года по ВЭД, после 2013 г. имеет тенденцию к снижению.

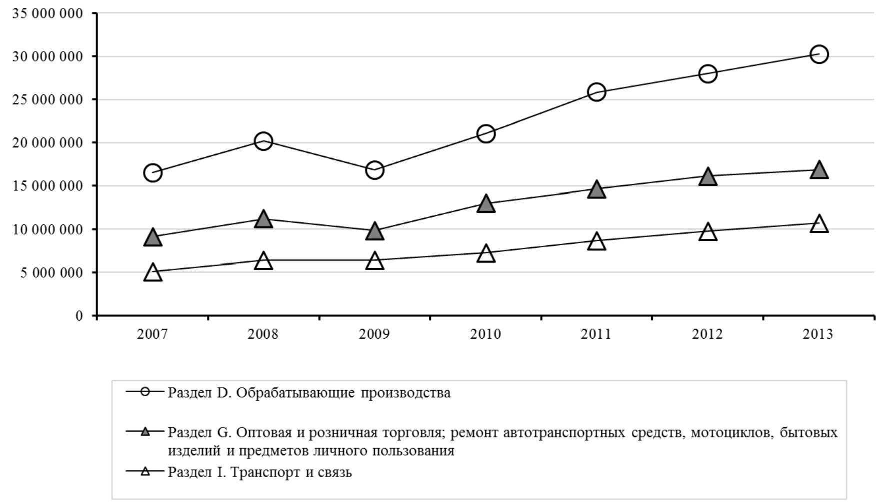
Данное моделирование позволяет с удовлетворительной точностью воспроизводить зависимости, которые представлены на рис. 2.

Управление валовыми выпусками позволяет целенаправленно смещать так называемые экономические реалии в сторону траекторий сбалансированного роста валового производства, объективно оценивать и формировать инвестиционную политику в стране и регионах.

Важно правильно запустить и использовать алгоритмы экономической оптимизации, которые свидетельствуют о том, что процессы достижения рыночного равновесия и народнохозяйственного планирования являются по большому счету эквивалентными. Их цель – максимизация уровня благосостояния народа как решающего и конечного критерия эффективности экономики. Рыночная экономика важна не сама по себе, а только как фактор роста благосостояния граждан страны.

***Рисунок 1***

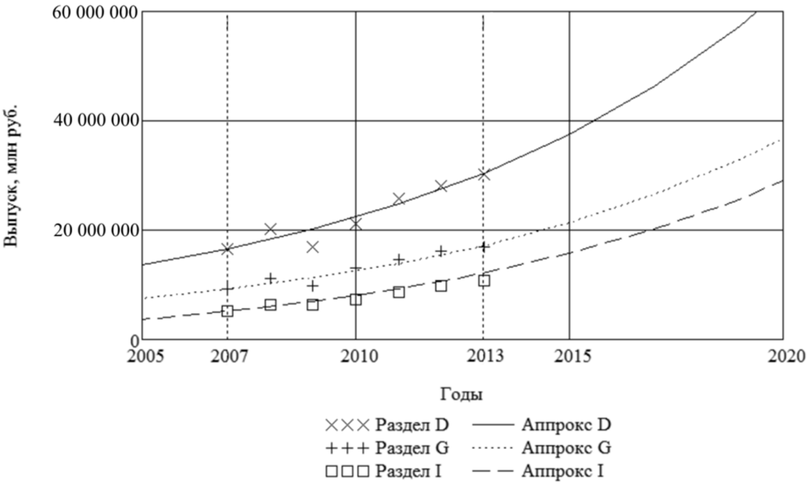
**Выпуск наиболее значимых видов экономической деятельности в текущих ценах в 2007–2013 гг., млн руб.**




*Источник:* авторская разработка

***Рисунок 2***

**Аппроксимация валового выпуска в 2005–2020 гг.**




*Примечание.* Выпуск по разделам ОКВЭД.
*Источник:* авторская разработка

**Список литературы**


1. *Леонтьев В.В.* Межотраслевая экономика. М.: Экономика, 1997. 477 с.
2. *Леонтьев В.В.* Экономические эссе. М.: Политиздат, 1990. 416 с.
3. *Leontief W., Duchin F.* The Future of Automation on Workers. New York: Oxford University Press, 1986. 182 p.
4. *Peterson W.* Advances in Input-Output Analysis: Technology, Planning, and Development. USA: Oxford University Press, 1991. 256 p.
5. *Суслов В.И*. Без баланса в стране – без царя в голове // ЭКО. 2011. № 5. С. 5–15.
6. *Масакова И.Д.* Нашей экономике нужно посмотреть на себя в зеркало // ЭКО. 2011. № 5. С. 16–26.
7. *Duchin F.* Structural Economics: Measuring Change in Technology, Lifestyles, and the Environment, Island Press, 1998. 210 p.
8. *Федоренко Н.П.* Россия на рубеже веков. М.: Экономика, 2003. 727 с.
9. *Белых А.А*. История советских экономико-математических исследований: монография. Ленинград: ЛГУ, 1990. 141 с.
10. *Стеенге А.* Метод «затраты – выпуск» в Нидерландах // ЭКО. 2011. № 5. С. 34–43.
11. *Leontief W. and collaborators*. Studies in the Structure of the American Economy. New York: Oxford University Press, 1953. 640 p.
12. *Уилкинсон Дж*. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 565 с.
13. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 519 с
14. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 400 с.
15. *Garbow B.S., Moler C.B., Dongarra J.J., Boyle J.M.* Matrix Eigensystem Routines – EISPACK Guide Extension. Berlin, Heidelberg: Springer, 1977. 351 p.
16. *Attawway S*. MATLAB: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving. Boston: Butterworth-Heinemann, 2012. 518 p.
17. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А*. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
18. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К*. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
19. *Golub G.H., Van Loan C.F.* Matrix Computations. Baltimore, London: The John Hopkins University Press, 2012. 790 p.
20. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

ISSN 2311-8733 (Online)
ISSN 2073-1477 (Print)

*Economic-Mathematical Modeling*

**STATIC STABILITY AND DYNAMIC PROPERTIES OF MACROECONOMIC SYSTEMS**

**Ramzia R. DUSZYNSKI[a], Evgenii L. TOROPTSEV[b,•], Aleksandr S. MARAKHOVSKII[c]**

[a] National Louis University, College of Arts and Sciences, Chicago, Illinois, USA
ramzia@aol.com

[b] North-Caucasian Federal University, Stavropol, Russian Federation
eltoroptsev@yandex.ru

[c] North-Caucasian Federal University, Stavropol, Russian Federation
marahov@yandex.ru

• Corresponding author

**Article history:**
Received 19 February 2016
Accepted 9 March 2016

**JEL classification:** C00, C30, C61, P11

**Keywords:** input-output, economic dynamics, sustainability

**Abstract**

**Importance** The paper studies the problems of organization of research of the sustainability of economic systems by analyzing their dynamic properties and investigating the potential of improvement of economic and mathematical modeling of such research.

**Objectives** The study aims to formulate strategic ways to improve economic and mathematical modeling in order to dramatically improve the efficiency of research of economic dynamics of macro-systems based on dynamic input-output models, investigate the possibility of obtaining the base "input-output" tables for the administrative and economic regions, develop a conceptual model of control of the economic sub-motions as well as options for formalized control of the economic dynamics.

**Methods** For the study, we used the input-output methods, theory of differential equations, methods of linear algebra, and the methods of applied nonlinear programming.

**Results** The paper proposes a method of direct control of matrix eigenvalues of the dynamic model of interindustry balance, and justifies an algorithm to measure the degree of economic growth.

**Conclusions and Relevance** We conclude that in modern Russia, management of dynamics and economic growth, as well as changing its structure are possible only on the basis of Keynesian methodology. The study's results are intended to be used by individuals and entities that make economic decisions both at the regional and country levels.



## Acknowledgments

The research and article were supported by the Russian Foundation for Humanities, grant No. 16-02-00091(a) *Modeling and Control of the Economic Dynamics of Complex Systems*.

## References

1. Leontief W. *Mezhotraslevaya ekonomika* [Input-Output Economics]. Moscow, Ekonomika Publ., 1997, 477 p.
2. Leontief W. *Ekonomicheskie esse* [Essays in Economics]. Moscow, Politizdat Publ., 1990, 416 p.
3. Leontief W., Duchin F. The Future Impact of Automation on Workers. New York, Oxford University Press, 1986, 182 p.
4. Peterson W. Advances in Input-Output Analysis: Technology, Planning, and Development. USA, Oxford University Press, 1991, 256 p.
5. Suslov V.I. [Country balanceless – country rudderless (Without balance in the country – without a king in the head)]. *EKO = ECO*, 2011, no. 5, pp. 5–15. (In Russ.)
6. Masakova I.D. [Our economy needs to look at itself in the glass]. *EKO = ECO*, 2011, no. 5, pp. 16–26. (In Russ.)
7. Duchin F. Structural Economics: Measuring Change in Technology, Lifestyles, and the Environment. Island Press, 1998, 210 p.
8. Fedorenko N.P. *Rossiya na rubezhe vekov* [Russia at the turn of the century]. Moscow, Ekonomika Publ., 2003, 727 p. (In Russ.)

9. Belykh A.A. *Istoriya sovetskikh ekonomiko-matematicheskikh issledovanii: monografiya* [The history of Soviet economic-mathematical research: a monograph]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1990, 141 p.

10. Steenge A. [The Input-Output Method in the Netherlands]. *EKO = ECO*, 2011, no. 5, pp. 34–43. (In Russ.)

11. Leontief W. Studies in the Structure of the American Economy. New York, Oxford University Press, 1953, 640 p.

12. Wilkinson J.H. *Algebraicheskaya problema sobstvennykh znachenii* [The Algebraic Eigenvalue Problem]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 565 p.

13. Nikaido H. *Vypuklye struktury i matematicheskaya ekonomika* [Convex Structures and Economic Theory]. Moscow, Mir Publ., 1972, 519 p.

14. Voevodin V.V. *Vychislitel'nye osnovy lineinoi algebry* [Computational principles of linear algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 400 p.

15. Garbow B.S., Moler C.B., Dongarra J.J., Boyle J.M. Matrix Eigensystem Routines – EISPACK Guide Extension. Berlin, Heidelberg, Springer, 1977, 351 p.

16. Attawway S. MATLAB. A Practical Introduction to Programming and Problem Solving. Boston, Butterworth-Heinemann, 2012, 518 p.

17. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. *Matritsy i vychisleniya* [Matrix and calculations]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 318 p.

18. Forsythe G., Malcolm M., Moler C. *Mashinnye metody matematicheskikh vychislenii* [Computer Methods for Mathematical Computations]. Moscow, Mir Publ., 1980, 280 p.

19. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. Baltimore, London, The John Hopkins University Press, 2012, 790 p.

20. Horn R.A., Johnson Ch.R. *Matrichnyi analiz* [Matrix Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1989, 655 p.