УДК 330.4

ПОСТРОЕНИЕ КРАТЧАЙШЕЙ СЕТИ ДОРОГ НА ОДНОРОДНОЙ ТЕРРИТОРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА (НА ПРИМЕРЕ ЧИСТОПОЛЬСКОГО РАЙОНА РЕСПУБЛИКИ ТАТАРСТАН)

Алексей Геннадьевич Исавнин,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математических методов в экономике,
Набережночелнинский институт (филиал)
Казанского (Приволжского) федерального университета,
Набережные Челны, Российская Федерация
isavnin@mail.ru

Радик Шамилович Шарипов,
аспирант кафедры производственного менеджмента,
Набережночелнинский институт (филиал)
Казанского (Приволжского) федерального университета,
Набережные Челны, Российская Федерация
radik@sharipov.com

Предмет/тема. *Статья посвящена проблеме соединения нескольких населенных пунктов системой дорог таким образом, чтобы по этим дорогам можно было из каждого пункта добраться в любой другой, причем длина пути должна быть минимальной. Рассмотрена возможность соединения ряда населенных пунктов Чистопольского района Республики Татарстан кратчайшей сетью дорог на основе трехточечной задачи Штейнера.*

Цели/задачи. *Целью статьи является практическое применение задачи Штейнера в разработке и построении сетей кратчайших дорог на однородной территории на примере нескольких населенных пунктов Чистопольского района Республики Татарстан.*

Методология. *Исследование проведено с помощью трехточечной задачи Штейнера.*

Результаты. *Рассмотрена возможность практического использования задачи Штейнера при проектировании и реконструкции автомобильных дорог, получена новая сеть дорог минимальной длины. Для примера рассмотрено соединение нескольких населенных пунктов Чистопольского района Республики Татарстан (с. Старое Иванаево, с. Белая Гора и пос. Николаевка). Обоснована экономия бюджетных средств за счет сокращения длины пути и уменьшения затрат на дорожное строительство. Доказано, что такая экономия будет способствовать увеличению количества соединенных населенных пунктов с общей сетью автомобильных дорог при том же финансировании.*

Выводы/значимость. *Сделан вывод о том, что применение трехточечной задачи Штейнера при проектировании и реконструкции автомобильных дорог на однородной территории позволяет значительно сократить объемы строительных работ, уменьшить длину пути между населенными пунктами, сократить время прохождения участка, что будет способствовать развитию транспортного потенциала региона.*

Ключевые слова: *задача Штейнера, точки Штейнера, однородная территория, проектирование дорог, трехточечная задача, сокращение длины пути*

Введение

Значительная площадь территории Российской Федерации обусловливает высокую значимость эффективного транспортного сообщения для сохранения территориальной целостности, геополитического влияния и конкурентоспособности на международном рынке. Однако состояние дорожного хозяйства в настоящее время не позволяет в полном объеме обеспечивать потребности российской экономики и конкурентоспособность международных грузоперевозок, проходящих через территорию Российской Федерации.

Нахождение кратчайшего пути является важнейшей задачей при проектировании и реконструкции автомобильных и железных дорог. Развитие современной и эффективной транспортной инфраструктуры, обеспечивающей ускорение товародвижения и снижение транспортных издержек в экономике, является одной из приоритетных задач государства на ближайшие годы[1]. Активный рост экономики государства невозможен в условиях инфраструктурных ограничений, связанных с низким качеством дорог и низкой пропускной способностью инфраструктурных объектов дорожной сети (мостов, переездов и др.). В большинстве развитых стран формирование сети автомобильных дорог осуществлялось в рамках долгосрочных государственных программ, устанавливающих показатели развития дорожной сети и соответствующие этим показателям объемы финансирования [1]. С развитием дорожных сетей все чаще возникают задачи присоединения новых участков к уже имеющимся. Одной из подобных задач является задача соединения нескольких населенных пунктов кратчайшей системой дорог таким образом, чтобы по этим дорогам можно было добраться до каждого пункта. Предлагается рассмотреть решение данной задачи на однородном участке строительства. В этом случае задача принимает вид задачи Штейнера на евклидовой плоскости [2].

Под задачей Штейнера на евклидовой плоскости понимается проблема нахождения плоскости с евклидовой метрикой кратчайшего дерева, связывающего n заданных точек плоскости $V_1,...,V_n$. Заданные точки носят название терминальных точек [3]. Но в отличие от задачи о кратчайшей сети на графе в задаче Штейнера допускается при необходимости введение новых вершин дерева, отличных от заданных. Эти вершины называют точками Штейнера [4–5]. Хорошо известны достаточные условия: в решение могут входить промежуточные точки, и все соединения должны быть отрезками, соединяющими точки (исходные и промежуточные). В каждой промежуточной точке должны сходиться три отрезка, а в исходных точках – более трех. Угол между отрезками, сходящимися в данной точке, не должен быть меньше 120° [6]. Основное внимание следует уделять поиску абсолютно минимальной сети среди всех имеющихся сетей, использующих фиксированное конечное множество N точек плоскости. Существует несколько подходов к указанной проблеме Штейнера. Один из них предполагает поиск абсолютно минимальной сети в классе сетей, все вершины которых принадлежат N. В этом случае минимальная сеть является деревом (не имеет циклов), которое называется минимальным деревом [7]. Э. Гилберт и Г. Поллак показали [8], что дерево Штейнера не более чем на 13,4% короче минимального остовного дерева.

Однако, как было доказано группой ученых, эта проблема является *NP*-трудной [9–10]. Это означает, что нахождение ее решения за полиномиальное время затруднительно. Как отмечает М. Херринг [11], текущим наиболее оптимальным и интересным алгоритмом, решающим задачу Штейнера, является алгоритм GeoSteiner до 2 000 точек, реализованный Д. Вармом, П. Винтером и М. Захариасеном [12].

Вначале следует решить задачу нахождения точки Штейнера для трех точек (трехточечную задачу Штейнера) [13–14].

Существуют следующие варианты решения данной задачи.

1. Если каждый из углов между отрезками, соединяющий точку Штейнера с каждой из заданных

[1] Федеральная целевая программа «Развитие транспортной системы России (2010–2020 гг.)», утв. постановлением Правительства РФ от 05.12.2001 № 848 (ред. от 30.09.2014).

точек (вершин треугольника), составляет 120°, тогда точка Штейнера либо лежит внутри данного треугольника, либо совпадает с одной из этих вершин.

2. Угол, образованный отрезками, соединяющими эту точку с другими заданными, равен или больше 120°.

Если же один из углов треугольника с вершинами в этих точках ≥ 120°, то сеть состоит из 2 ребер (сторон этого угла). Если все углы < 120°, т.е. точка Штейнера состоит из 3 ребер, соединяющих дополнительную точку Штейнера с тремя вершинами [15–16].

Следует рассмотреть указанный алгоритм решения трехточечной задачи Штейнера на примере строительства нового дорожного участка.

Постановка задачи

Предлагается рассмотреть указанную задачу на примере строительства автомобильной дороги, соединяющей три населенных пункта. Для этого будет использована трехточечная задача Штейнера и найдена длина кратчайшего пути полученного участка.

Для решения данной задачи было реализовано приложение в программной среде Delphi, позволяющее вычислить точку Штейнера, длину кратчайшего пути до каждой точки и стоимость строительства полученного участка.

Соединение нескольких населенных пунктов Чистопольского района Республики Татарстан (с. Старое Иванаево, с. Белая Гора и пос. Николаевка) представлено на рис. 1.

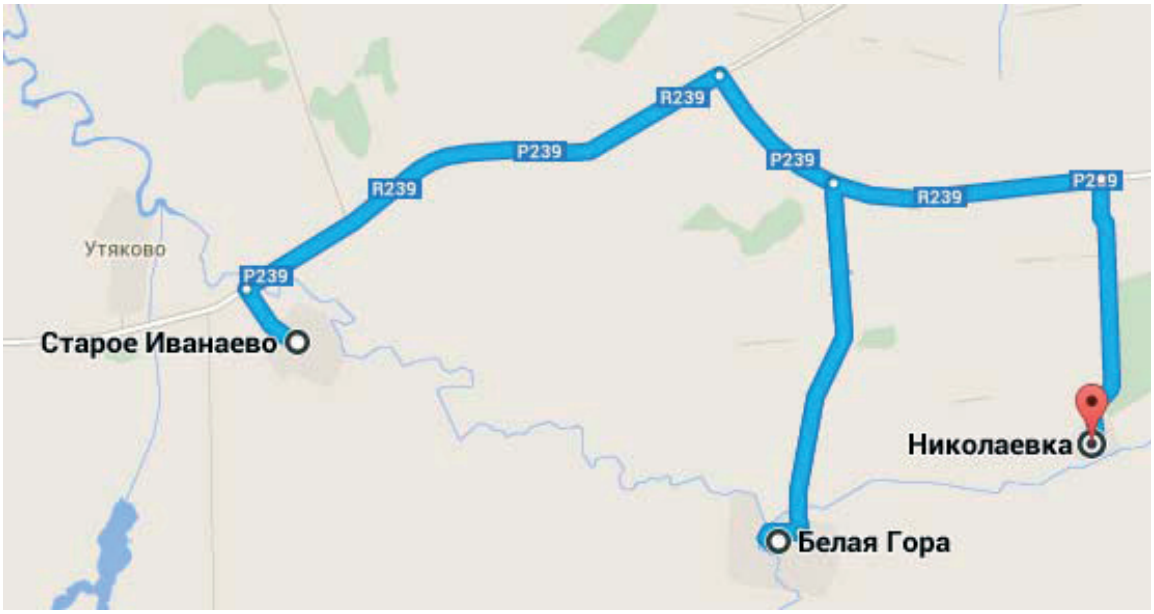
Строение рельефа Республики Татарстан определяется расположением ее в пределах Восточно-Европейской равнины. В природном отношении территория района указанных населенных пунктов входит в лесостепную ландшафтную зону. Рельеф территории представляет собой слабо приподнятую, слегка волнистую, наклоненную на север и запад равнину [17]. Такие свойства территории позволяют рассматривать ее как однородную.

В настоящий момент населенные пункты соединены между собой дорогой, суммарная длина которой составляет 18,2 км, по данным карт Google Maps. Предлагается рассмотреть возможность соединения указанных населенных пунктов другой, более короткой дорогой.

Алгоритм поиска точки Штейнера

Точка Штейнера является точкой внутри треугольника, если углы, образованные при соединении каждой вершины с данной точкой, будут равны 120° [18]. При поиске дополнительной точки Штейнера необходимо учитывать следующее:

– если есть угол, равный или больше 120°, то точка Штейнера в виде дополнительной точки отсутствует [19–20];



Источник: Google Maps.

Рис. 1. Расположение населенных пунктов на карте

– если все углы меньше 120°, то точка Штейнера существует.

Пусть точка Штейнера лежит внутри треугольника *ABC*. Для его нахождения предлагается воспользоваться следующим алгоритмом.

Шаг 1. На одной из сторон треугольника *ABC* построим равносторонний треугольник. Например, возьмем сторону *BC*. Определив ее длину, найдем точку пересечения двух дуг, описанных из точек *B* и *C*. Назовем полученную точку *D*. Строим равносторонний треугольник *BCD*, причем точка *A* не принадлежит этому треугольнику.

Шаг 2. Найдем центр окружности, проходящей через точки *B*, *C* и *D*. Для этого снова проведем дуги на стороне *BC*. Проведем прямую, соединяющую точку пересечения дуг с точкой *D*. Проделаем то же самое и для другой стороны. Точка пересечения данных прямых (биссектрис) – центр искомой окружности.

Шаг 3. Опишем вокруг треугольника *BCD* окружность.

Шаг 4. Найдем точку Штейнера. Точка пересечения описанной окружности с отрезком *AD* и есть искомая точка Штейнера *T*.

Пример практической задачи

Данный алгоритм был применен для решения задачи реконструкции имеющейся сети дорог, соединяющих 3 близлежащих населенных пункта (с. Старое Иванаево, с. Белая Гора и пос. Николаевка), с использованием задачи Штейнера. Для этого необходимо было определить расположение новой дороги с учетом финансовых затрат.

Для решения данной задачи использовано разработанное авторами приложение «Решение задачи Штейнера».

Итак, известны географические координаты указанных населенных пунктов:

– с. Старое Иванаево – 55,310697°; 50,422238°;
– с. Белая Гора – 55,292016°; 50,501070°;
– пос. Николаевка – 55,301744°; 50,552625°.

Данные значения вводятся в программу «Решение задачи Штейнера», и рассчитывается точка Штейнера (рис. 2). Для этого в каждое из полей вводятся обозначение каждой точки (поле «Введите обозначение точек») и значения координат *X* и *Y* (поля «Введите *X*-координату точки» и «Введите *Y*-координату точки»).

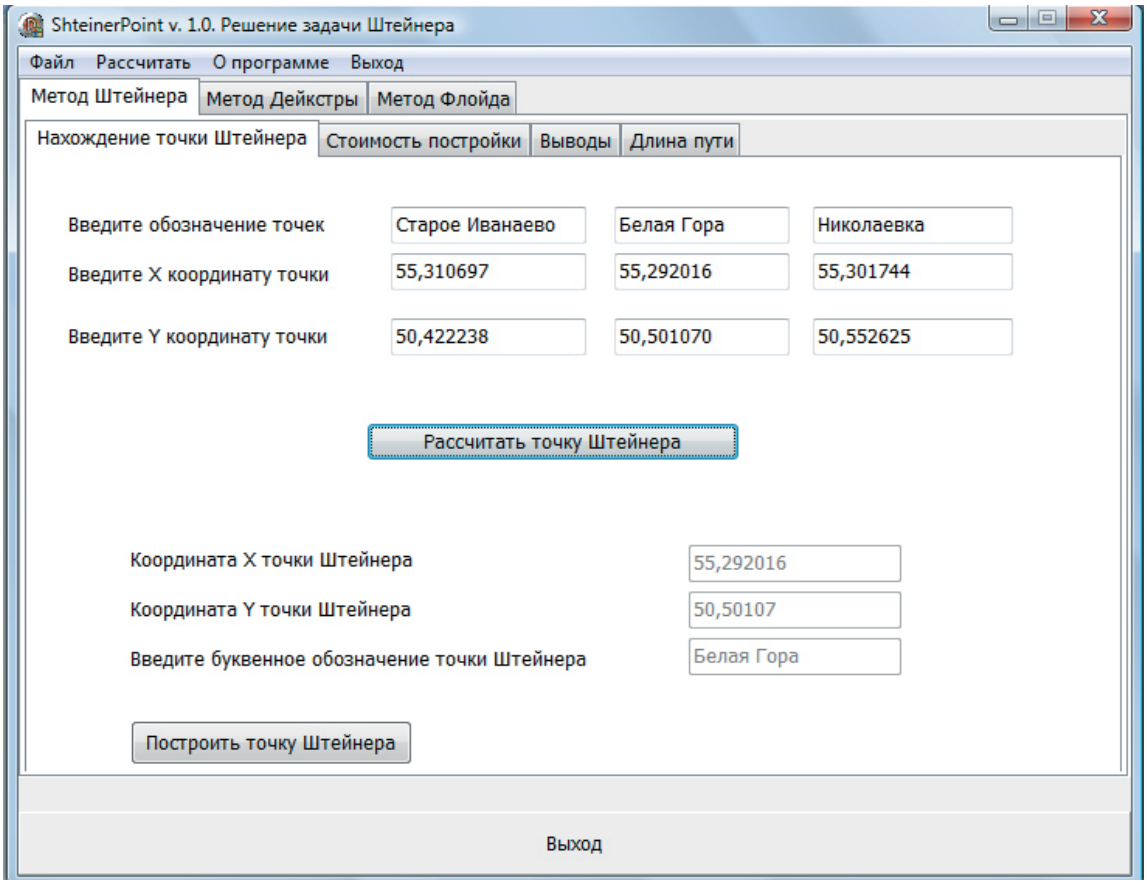


Рис. 2. Нахождение точки Штейнера

Источник: авторская разработка.

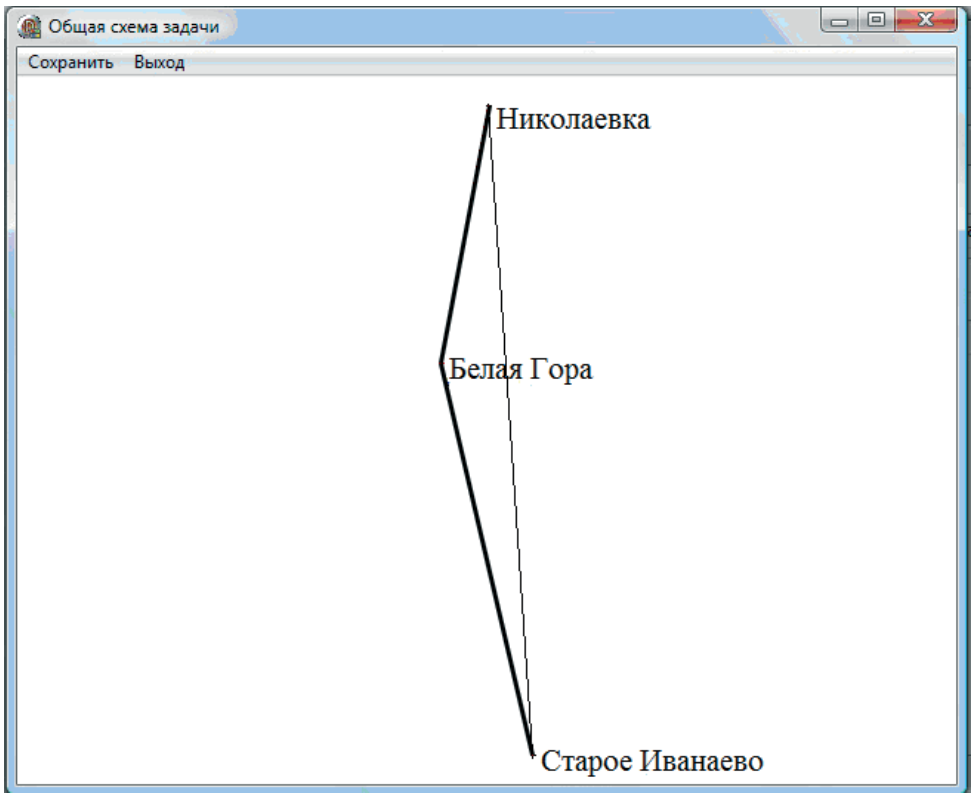


Рис. 3. Графическая схема задачи Штейнера

Источник: авторская разработка.

В результате находятся координаты точки Штейнера:

$$X = 55{,}292016;$$
$$Y = 50{,}501070.$$

Полученные координаты совпадают с координатами населенного пункта с. Белая Гора. Это означает, что угол, образованный отрезками, соединяющими другие вершины (села), больше или равен 120°.

Кратчайшая сеть дорог, соединяющая данные населенные пункты, представлена на рис. 3 (полужирная линия). Точка Штейнера совпадает с координатами с. Белая Гора.

Теперь предлагается рассмотреть длину и стоимость постройки полученного нового участка дороги.

На вкладке «Стоимость постройки» можно рассчитать стоимость строительства, исходя из средних цен на подобные виды работ (строительства дороги с асфальтобетонным покрытием, с установкой знаков и заграждений), указанных в государственных заказах[2]. К примеру, цена строительства 1 км дороги составляет 43 191 302,34 руб. (рис. 4).

Итак, длина маршрута для каждого из участков от населенных пунктов до точки Штейнера составляет:

– с. Старое Иванаево – с. Белая Гора – 8,1 км;
– п. Николаевка – с. Белая Гора – 5,2 км.

Координаты точки Штейнера совпали с координатами с. Белая Гора, в связи с чем длина пути равна 0.

Общая длина пути – 13,3 км.

Предполагаемая стоимость строительства указанных участков составляет 574 444 321,12 руб.

Итак, найдена точка Штейнера для указанных вершин:

– с. Старое Иванаево (55,310697; 50,422238);
– с. Белая Гора (55,292016; 50,501070);
– п. Николаевка (55,292016; 50,501070.

Точка Штейнера совпадает с координатами с. Белая Гора (55,292016; 50,501070).

Получена минимальная длина нового пути – 13,3 км. Предполагаемая стоимость прокладки путей при средней цене 43 191 302,34 руб. за 1 км составляет 574 444 321,12 руб.

Имеющийся путь, соединяющий данные населенные пункты, составляет 18,2 км. Новый путь, найденный по методу Штейнера, составляет 13,3 км (рис. 5). Благодаря методу Штейнера, удалось сократить длину пути на 4,9 км.

[2] Реестр закупок и заказов. URL: http://zakupki.gov.ru/epz/main/public/home.html.

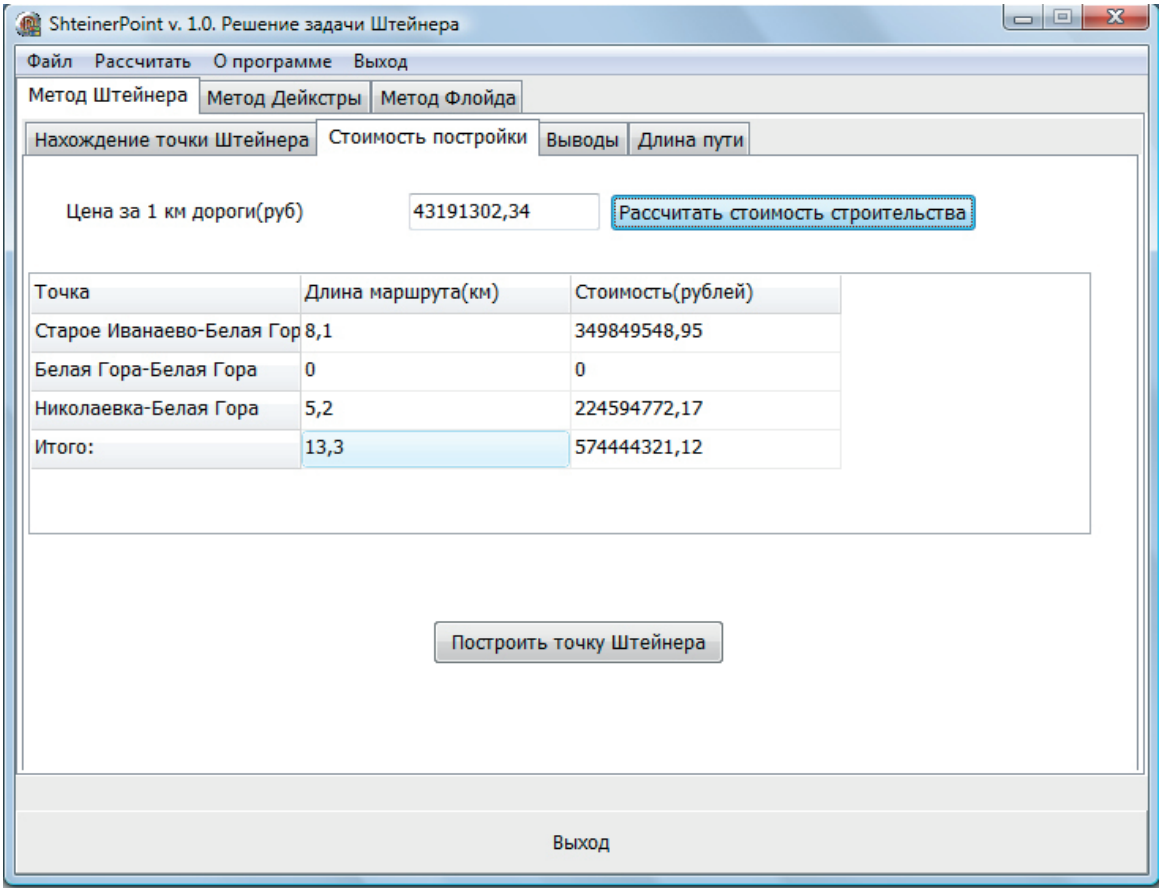


Рис. 4. Стоимость постройки и длина маршрута

Источник: авторская разработка.

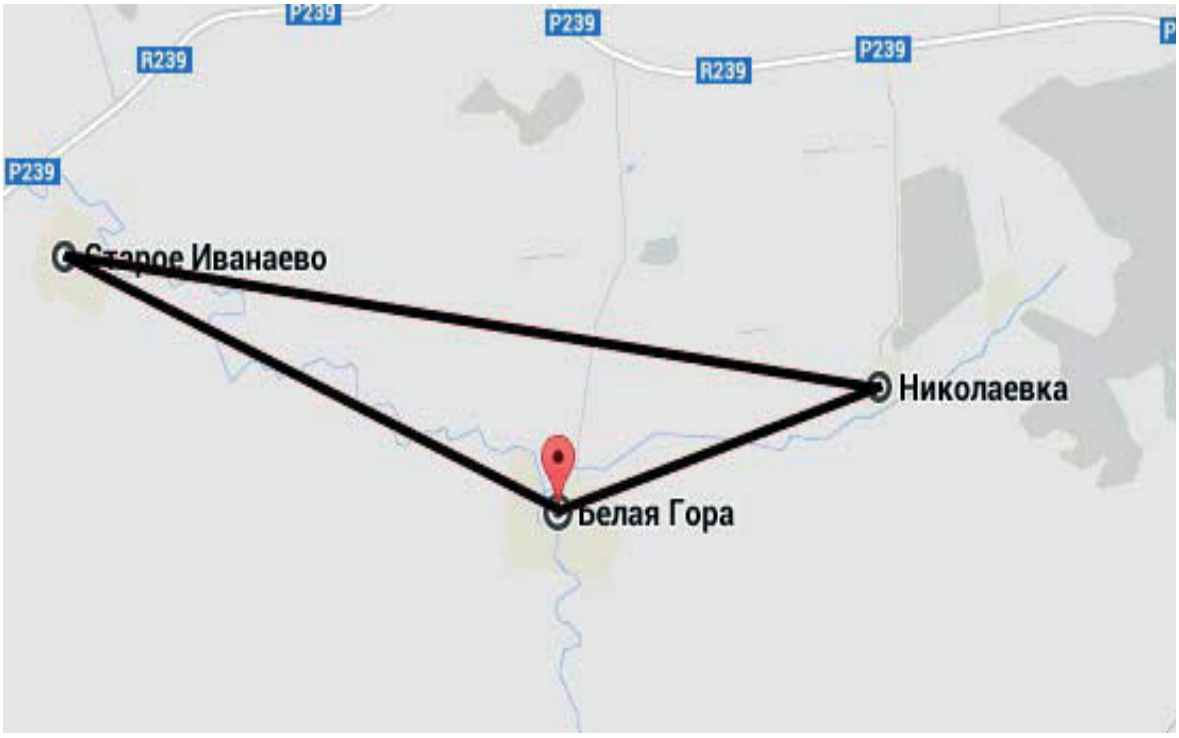


Рис. 5. Новый путь

Источник: авторская разработка.

Заключение

С помощью трехточечной задачи Штейнера была спроектирована новая дорога, соединяющая три населенных пункта кратчайшей сетью дорог. Длина полученного пути на 4,9 км меньше текущей дороги, соединяющей села. Уменьшение длины пути отражается на расходах по его строительству. При некоторых изменениях указанный алгоритм можно использовать и для большего количества точек с учетом ландшафтных особенностей. Для этого следует разбить начальные точки на массивы по три вершины. В каждом из данных массивов найти точку Штейнера, в последующем изменить элементы (вершины) массивов и для каждого снова найти точки Штейнера, затем вычислить длины полученных путей. Наиболее кратчайшие из них и образуют минимальную сеть Штейнера. При масштабном внедрении данной методики можно ожидать значительной экономии ресурсов (финансовых, людских и временных).

Список литературы

1. *Халтурин Р.А.* Состояние и опыт строительства дорожной сети в России и за рубежом // Экономические науки. 2011. № 74. С. 223–226.

2. *Лотарев Д.Т.* Неформальные описательные модели транспортных коммуникаций, транспортных сетей и территорий в задаче прокладки путей и коммуникаций // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2009. Т. 46. С. 259–273.

3. *Лотарев Д.Т., Уздемир А.П.* Преобразование задачи Штейнера на евклидовой плоскости к задаче Штейнера на графе // Автоматика и телемеханика. 2005. № 10. С. 80–92.

4. *Melzak Z.A.* On the problem of Steiner // Canadian Mathematical Bulletin. 1961. Vol. 4. P. 143–148.

5. *Протасов В.Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. М.: МЦНМО, 2005. 56 с.

6. *Романовский И.В.* Задача Штейнера на графах и динамическое программирование // Компьютерные инструменты в образовании. 2004. № 2. С. 80–86.

7. *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Задача Штейнера на плоскости или плоские минимальные сети // Математический сборник. 1991. Т. 182. № 12. С. 1813–1844.

8. *Gilbert E.N., Pollak H.O.* Steiner minimal trees // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1968. Vol. 16. № 1. P. 1–29.

9. *Garey M.R., Graham R.L., Johnson D.S.* The complexity of computing Steiner minimal trees // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1977. Vol. 32. № 4. P. 835–859.

10. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия. Введение: монография. М.: Мир, 1989. 478 с.

11. *Herring M.* The euclidean Steiner tree problem. Ohio: Denison University, 2004. 11 p.

12. *Warme D., Winter P., Zachariasen M.* Exact algorithms for plane Steiner tree problems: a computational study. Denmark: University of Copenhagen, 1998. P. 81–116.

13. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. М.: МЦНМО, 2001. 568 с.

14. *Andreescu T., Mushkarov O., Stoyanov L.* Geometric problems on maxima and minima. Boston: Birkhauser, 2006. 272 p.

15. *Гордеев Э.Н., Тарасцов О.Г.* Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Т. 5. № 2. С. 3–28.

16. *Hwang F.K.* On Steiner minimal trees with rectilinear distance // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1976. Vol. 30. № 1. P. 104–114.

17. *Ермолаев О.П.* Ландшафты Республики Татарстан. Региональный ланшафтно-экологический анализ: монография. Казань: Слово, 2007. 411 с.

18. *Hwang F.K., Richards D.S., Winter P.* The Steiner tree problem: monograph. Netherlands: Elsevier Science Publishers, 1992. 336 p.

19. *Cockayne E.J.* On the Steiner problem // Canadian Mathematical Bulletin. 1967. Vol. 10. № 3. P. 431–450.

20. *Cheng X., Du D.-Z.* Steiner Trees in Industry. Netherlands: Springer Science & Business Media, 2001. 507 p.

Regional Economics: Theory and Practice
ISSN 2311-8733 (Online)
ISSN 2073-1477 (Print)

Economic-Mathematical Modeling

BUILDING THE SHORTEST ROAD NETWORK IN HOMOGENEOUS TERRITORIES USING THE THREE-POINT STEINER TREE PROBLEM (THE CHISTOPOLSKY DISTRICT OF THE REPUBLIC OF TATARSTAN CASE)

Aleksei G. ISAVNIN,
Radik Sh. SHARIPOV

Abstract

Importance The article deals with the problem of linking multiple settlements with a system of roads permitting people to get from any settlement to any other one, with a minimum path length. The Chistopolsky District of the Republic of Tatarstan is a case study for the modeling the shortest road network based on the three-point Steiner tree problem.

Objectives The purpose of the article is a practical application of the Steiner tree in designing and building networks of the shortest roads in the homogeneous territory of several settlements of the Chistopolsky District of the Republic of Tatarstan.

Methods We conducted the study using the three-point Steiner tree problem.

Results We have considered the possibility of using the Steiner tree for the design and reconstruction of roads and built a model of a new network of minimum-length roads.

Conclusions and Relevance We concluded that the application of the three-point Steiner tree for the design and reconstruction of highways in homogeneous territories can significantly reduce the amount of construction work, reduce the path length between settlements, reduce the time of passing, which will contribute to the development of transport potential of the region.

Keywords: Steiner tree problem, Steiner points, homogeneous territory, road engineering, three-point, path, length

References

1. Khalturin R.A. Sostoyanie i opyt stroitel'stva dorozhnoi seti v Rossii i za rubezhom [A condition and the experience of construction of road networks in Russia and abroad]. *Ekonomicheskie nauki = Economic Sciences*, 2011, no. 74, pp. 223–226.

2. Lotarev D.T. Neformal'nye opisatel'nye modeli transportnykh kommunikatsii, transportnykh setei i territorii v zadache prokladki putei i kommunikatsii [Informal descriptive models of transport communications, transport networks and territories in the task of ways and communications laying]. *Trudy Instituta sistemnogo analiza Rossiiskoi akademii nauk = Works of Institute of System Analysis of RAS*, 2009, vol. 46, pp. 259–273.

3. Lotarev D.T., Uzdemir A.P. Preobrazovanie zadachi Shteinera na evklidovoi ploskosti k zadache Shteinera na grafe [Conversion of the Steiner tree problem on the Euclidean plane to the Steiner tree problem on graph]. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2005, no. 10, pp. 80–92.

4. Melzak Z.A. On the problem of Steiner. *Canadian Mathematical Bulletin*, 1961, vol. 4, pp. 143–148.

5. Protasov V.Yu. *Maksimumy i minimumy v geometrii* [Maxima and minima in geometry]. Moscow, Moscow Center of Continuous Mathematical Education Publ., 2005, 56 p.

6. Romanovskii I.V. Zadacha Shteinera na grafakh i dinamicheskoe programmirovanie [Steiner tree on columns and the dynamic programming]. *Komp'yuternye instrumenty v obrazovanii = Computer Tools in Education*, 2004, no. 2, pp. 80–86.

7. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Zadacha Shteinera na ploskosti ili ploskie minimal'nye seti [The Steiner tree problem in plane or plane minimal nets]. *Matematicheskii sbornik = Sbornik: Mathematics*, 1991, vol. 182, no. 12, pp. 1813–1844.

8. Gilbert E.N., Pollak H.O. Steiner minimal trees. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1968, vol. 16, no. 1, pp. 1–29.

9. Garey M.R., Graham R.L., Johnson D.S. The complexity of computing Steiner minimal trees. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1977, vol. 32, no. 4, pp. 835–859.

10. Preparata F., Sheimos M. *Vychislitel'naya geometriya. Vvedenie: monografiya* [Computing geometry]. Moscow, Mir Publ., 1989, 478 p.

11. Herring M. The Euclidean Steiner Tree Problem. Ohio, Denison University, 2004, 11 p.

12. Warme D., Winter P., Zachariasen M. Exact algorithms for plane Steiner tree problems: a computational study. Denmark, University of Copenhagen, 1998, pp. 81–116.

13. Courant R., Robbins H. *Chto takoe matematika? Elementarnyi ocherk idei i metodov* [What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods]. Moscow, Moscow Center of Continuous Mathematical Education Publ., 2001, 568 p.

14. Andreescu T., Mushkarov O., Stoyanov L. Geometric Problems on Maxima and Minima. Boston, Birkhauser, 2006, 272 p.

15. Gordeev E.N., Tarastsov O.G. Zadacha Shteinera. Obzor [The Steiner tree problem: A survey]. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*, 1993, vol. 5, no. 2, pp. 3–28.

16. Hwang F.K. On Steiner minimal trees with rectilinear distance. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1976, vol. 30, no. 1, pp. 104–114.

17. Ermolaev O.P. *Landshafty Respubliki Tatarstan. Regional'nyi lanshaftno-ekologicheskii analiz: monografiya* [Landscapes of the Republic of Tatarstan. Regional landscape and ecological analysis: a monograph]. Kazan, Slovo Publ., 2007, 411 p.

18. Hwang F.K., Richards D.S., Winter P. The Steiner Tree Problem: A Monograph. Netherlands, Elsevier Science Publishers, 1992, 336 p.

19. Cockayne E.J. On the Steiner Problem. *Canadian Mathematical Bulletin*, 1967, vol. 10, no. 3, pp. 431–450.

20. Cheng X., Du D.-Z. Steiner Trees in Industry. Netherlands, Springer Science & Business Media, 2001, 507 p.

Aleksei G. ISAVNIN
Kazan (Volga Region) Federal University,
Branch in Naberezhnye Chelny, Naberezhnye Chelny, Republic of Tatarstan, Russian Federation
isavnin@mail.ru

Radik Sh. SHARIPOV
Kazan (Volga Region) Federal University,
Branch in Naberezhnye Chelny, Naberezhnye Chelny, Republic of Tatarstan, Russian Federation
radik@sharipov.com