**ISSN 2311-875X (Online)**
**ISSN 2073-2872 (Print)**

*Национальные интересы*

# ИЕРАРХИЧЕСКИЕ КОПУЛЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ КРЕДИТНОГО РИСКА

**Кристина Анатольевна КАЗАКОВА**[a,•], **Александр Геннадьевич КНЯЗЕВ**[b], **Олег Алексеевич ЛЕПЁХИН**[c]

[a] аспирантка кафедры мировой экономики и финансов,
Астраханский государственный университет, Астрахань, Российская Федерация
kristinakazakova0309@gmail.com

[b] кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и методики ее преподавания,
Астраханский государственный университет, Астрахань, Российская Федерация
agkniazev@mail.ru

[c] кандидат экономических наук, заведующий кафедрой мировой экономики и финансов,
Астраханский государственный университет, Астрахань, Российская Федерация
okmb07@yandex.ru

• Ответственный автор

**История статьи:**
Получена 28.04.2017
Получена в доработанном виде 15.05.2017
Одобрена 09.06.2017
Доступна онлайн 28.06.2017

**УДК** 336.711.642
**JEL:** C58, G17

https://doi.org/10.24891/ni.13.6.1032

**Ключевые слова:** банковский резерв, кредитный риск, просроченная кредитная задолженность, копулярная модель, прогнозирование

**Аннотация**

**Предмет.** Проблема оценки и управления банковскими рисками в период финансовой нестабильности приобретает на сегодняшний день глобальный характер. В условиях постоянно усиливающихся процессов интернационализации экономических взаимосвязей важно обеспечить приобщение финансовой системы регулирования банковских рисков страны к общепринятым международным стандартам посредством выработки эффективной системы инициативного стресс-тестирования участников банковской сферы. В настоящем исследовании проведено построение экономико-математической модели просроченной кредитной задолженности, основу которой представляют копулярные функции, позволяющие моделировать негауссовский характер распределения финансовых рисков, в частности кредитного риска.

**Цели.** Моделирование совместных распределений рядов просроченной ссудной задолженности в целях дальнейшего прогнозирования объемов кредитного риска. Посредством полученных результатов прогнозирования планируется провести оценку эффективности методов формирования резерва на возможные потери с последующим определением рационального подхода к системе резервных отчислений.

**Методология.** Рассмотрена возможность применения иерархических копулярных моделей для построения совместных распределений рядов просроченной кредитной задолженности банковских учреждений, выступающей в качестве основы для дальнейшего вычисления прогнозных значений просроченной задолженности по выданным ссудам.

**Результаты.** Построена и оценена многомерная копулярная модель просроченной ссудной задолженности с иерархической структурой. На основании смоделированной многомерной зависимости вычислены прогнозные значения просроченной кредитной задолженности, которые можно использовать в качестве расчетных размеров резервов на ссудные потери. Рассчитанные резервы оказались достаточными для покрытия реальных значений просроченной задолженности и в большинстве случаев – значительно меньше установленных в соответствии с Положением ЦБ РФ № 254-П о резервных нормах на кредитные потери.

**Выводы.** Продемонстрированная многомерная копулярная модель просроченной кредитной задолженности в полной мере может выступать основой эффективных систем риск-менеджмента в кредитных организациях.



Вопросы, касающиеся оценки уровня достаточности банковского капитала на случай непредвиденных потерь, сегодня широко обсуждаются как в научной, так и в профессиональной среде. Банковская теория и практика в условиях финансово-экономической нестабильности все больше нуждаются в выработке системных подходов к оценке и управлению финансовыми рисками.

Представители банковской сферы в рамках осуществления своей финансово-экономической деятельности, как правило, предпочитают обходиться минимумом капитала, повышая тем самым эффективность показателей роста активов и прибыльности. Со своей стороны, органы банковского надзора, напротив, считают, что именно высокий уровень капитала выступает главным гарантом снижения уровня банкротств. Возникающая в связи с этим дилемма подхода к оценке адекватности уровня капитала носит сегодня дискуссионный характер. Так, высказывается достаточно обоснованная точка зрения, которая предполагает, что банкротства в банковской сфере вызваны скорее плохим управлением, а в свою очередь, достаточно хорошо управляемые банки могут вполне успешно функционировать и с низкой нормой капитала. При этом важно подчеркнуть, что парадокс общепринятых нормативов надзорных банковских органов заключается в том, что, признавая важность определения уровня достаточности капитала, способствующего снижению риска банкротств, содержание данных документов практически не уделяет должного внимания важности самой процедуры управления с точки зрения подверженности рискам.

Российская банковская практика, находящаяся в настоящий момент на этапе приобщения к международным стандартам, реализует процедуры внедрения внутренних систем оценки уровня достаточности капитала, предусмотренные нормативным положением Базель II. Действующим на сегодняшний день остается также Положение ЦБ РФ от 26.03.2004 № 254-П «О порядке формирования кредитными организациями резервов на возможные потери по ссудам, ссудной и приравненной к ней задолженности», являющееся в определенной степени первой попыткой приближения к требованиям Базель I. Методология, описанная в настоящем документе, имеет ряд противоречивых моментов[1], толкование которых может обусловливать неэффективность действующих процедур формирования банковского резерва на случай непредвиденных кредитных потерь с точки зрения рационального использования финансовых ресурсов.

В свою очередь, Базельский комитет по банковскому регулированию и надзору проводит постоянную политику пересмотра стратегий оценки уровня достаточности капитала, потребность в которой в настоящий момент обусловлена интернационализацией экономических сообществ, модернизацией банковской деятельности со свойственной ей неопределенностью. Так, согласно рекомендациям комитета[2] использование копул является одним из корректных способов оценки рисков. Построение соответствующих многомерных зависимостей представляет собой определенный инструментарий, позволяющий смоделировать негауссовский характер распределения финансовых рисков, в частности риска неплатежа по кредитным требованиям.

На сегодняшний день продемонстрировано немалое количество научных исследований, проводимых в области оценки финансового риска, и, в частности, кредитного риска, где в качестве методологической основы выступает моделирование посредством копула-функций: например, работы Я.В. Бологова [1], К.А. Казаковой[3]. Кроме того, известны труды Д. Фантаццини – не только с точки зрения теоретических основ моделирования многомерных зависимостей [2], но и с позиции практической приемлемости копул для случая оценки рисков финансовых учреждений [3, 4].

В настоящем исследовании будет рассмотрена возможность применения иерархических копулярных моделей для построения совместных распределений рядов просроченной ссудной задолженности банковских учреждений, которая, в свою очередь, будет выступать в качестве главной основы для дальнейшего прогнозирования объемов просроченной задолженности по кредитным требованиям. Предложенная альтернатива процедуре формирования резервных отчислений на случай предупреждения рисковых ситуаций будет тоже оценена с точки зрения рациональности использования финансовых ресурсов, а также определена эффективность ее применения в качестве количественного метода оценки кредитных рисков в системе современного банковского риск-менеджмента.

Сначала сделаем небольшой экскурс в копулярную теорию с обоснованием выбора копулярной модели. Далее в исследовании предусмотрен процесс построения и оценки модели просроченной задолженности по кредитным требованиям с последующим получением прогнозных значений неплатежа по ранее оформленным займам посредством генерирования выборки из совместного распределения. В заключение будет выполнен сравнительный анализ эффективности формирования резервного фонда на случай кредитных потерь.

Возвращаясь к теории, важно отметить, что копулой $C(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ называется функция совместного распределения $n$ случайных

[1] *Kazakova K.A., Knyazev A.G., Lepekhin O.A., Skobleva E.I.* Assessment and Management of Banking Risks in the Global Community: Benefits and Challenges of Implementation of Basel Standards // Asian Social Science. 2015. No. 20. P. 141–147.

[2] Basel Committee on Banking Supervision, December 2010. Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. URL: http://bis.org/publ/bcbs189_dec2010.pdf

[3] *Казакова К.А., Князев А.Г., Лепёхин О.А.* Оптимальный размер банковского резерва: прогноз просроченной кредитной задолженности с использованием копулярных моделей // Вестник НГУ. Сер. Социально-экономические науки. 2015. Т. 15. Вып. 4.

переменных, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. При этом следует напомнить, что применение копул для моделирования многомерных совместных распределений основывается на теореме Скляра [5]. Данная теорема утверждает, что любое многомерное распределение может быть представлено в виде набора частных функций распределения и копулы, которая задает характер зависимости между ними.

Пусть $H$ – $n$-мерная функция распределения вероятностей, $F_i$, …, $F_n$ – соответствующие частные функции распределения составляющих. Тогда существует такая копула $C$, что:

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{C}(F_1(x_1), \ldots F_n(x_n)). \quad (1)$$

При этом важно подчеркнуть, что если все одномерные функции распределения непрерывны, то копула определяется одним единственным образом.

Среди копул, которые используются для моделирования совместных распределений финансовых переменных, преимущество имеют архимедовы копулы. Данный факт объясняется, с одной стороны, простотой аналитического выражения соответствующего семейства копул, а с другой – их способностью моделировать «толстые хвосты» распределений. Архимедовы копулы содержат несколько известных однопараметрических семейств: копулы Франка, копулы Гамбела-Хаугарда, копулы Клейтона и др. В данном исследовании будет использована копула Клейтона. Для случая двух переменных она задается следующей формулой [5]:

$$C_a(u, v) = \max\{(u^{-a} + v^{-a} - 1)^{1/-a}, 0\};$$

$$a \geq -1, a \neq 0, \quad (2)$$

где $a$ – параметр парной копулы Клейтона;

$u$, $v$ – случайные величины.

Выбор копулы Клейтона объясняется тем, что именно данная многомерная функция распределения моделирует зависимости между малыми значениями случайных величин, а также имеет левый нижний хвост.

Далее важно отметить, что существуют различные меры зависимости между случайными величинами. При этом в теории копул особенную роль играет коэффициент корреляции Кендалла, поскольку данный показатель хорошо связан с параметрами копул. Для парной копулы Клейтона зависимость параметра копулы от коэффициента корреляции выражается следующей формулой [5]:

$$a = \frac{2(1-\tau)}{\tau}, \quad (3)$$

где $a$ – параметр парной копулы Клейтона;

$\tau$ – коэффициент корреляции Кендалла.

Примечательно, что в настоящем исследовании коэффициенты корреляции положительны для всех пар случайных переменных, поэтому параметры копул также являются положительными. В связи с этим формула для копулы Клейтона существенно упрощается:

$$C(u, v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}, a > 0. \quad (4)$$

Использование архимедовых копул для моделирования многомерных зависимостей ($n > 2$) ограничено свойством симметричности, а именно: многомерные архимедовы копулы инвариантны относительно любой перестановки переменных. В современной научной литературе рассматриваются различные способы преодоления данного затруднения. Основная идея заключается в построении многомерных моделей на основе парных копул. Так, одним из возможных обобщений парных копулярных моделей являются так называемые «ветвящиеся» копулы, по-другому обозначаемые как *vine*-копулы. Из значительного количества статей, посвященных *vine*-копулам, применительно к данному исследованию можно выделить ряд зарубежных публикаций [6, 7], работу А.И. Травкина [8], а также образовательный курс С.А. Айвазяна[4].

В настоящем исследовании будет предпринята попытка следования иному методу построения многомерных моделей, основанному на парных архимедовых копулах. Данный тип копул принято называть иерархическими зависимостями. Соответствующим зависимостям посвящены работы[5] [9–11].

Рассматривая процесс моделирования, важно отметить, что иерархические копулы строятся шаг за шагом. На каждом шаге моделируется парная копула $C(u, v)$, где $u$ и $v$ – либо парные копулы, либо случайные переменные. Для того чтобы соответствующая конструкция задавала копулу, ее «строительные блоки» должны удовлетворять определенным условиям. Для построения

[4] *Айвазян С.А., Фантаццини Д.* Эконометрика-2: продвинутый курс с приложениями в финансах. М.: ИНФРА-М, 2014. 944 с.

[5] *Puzanova N.* A hierarchical Archimedean copula for portfolio credit risk modeling. Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Studies 2011, 14. Deutsche Bundesbank, Research Centre, 32 p.

иерархических копул будут использоваться лишь только парные копулы одного и того же семейства, а именно копулы Клейтона. При этом задействованы будут только копулы с положительными параметрами. В данном случае условие сохранения копулярной структуры приобретает следующий вид – пусть $C(u, v)$, $C_1(u_1, v_1)$, $C_2(u_2, v_2)$ – парные копулы Клейтона с параметрами α, $\alpha_1$, $\alpha_2$ соответственно, тогда функция $C(C_1(u_1, v_1), C_2(u_2, v_2))$ задает копулу от четырех переменных, если $a \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$ [11].

Наиболее важным вопросом при построении иерархических копул является проблема выбора иерархической структуры зависимости, с помощью которой парные копулы объединяются в многомерную модель. При этом существуют различные подходы к решению данной проблемы [4]. В настоящем исследовании построение предусмотрено следующим образом: на каждом шаге будет объединена парной копулой пара переменных с наибольшим коэффициентом корреляции Кендалла, при этом переменными могут являться как исходные случайные величины, так и значения парных копул, построенных на предыдущих уровнях.

Далее целесообразно остановиться на описании задействованных в настоящем исследовании данных, а также на процессе их первичной обработки. В рамках проведенной работы были использованы ежемесячные данные по общей просроченной кредитной задолженности, а также общий объем кредитного портфеля, исчисленные в тыс. руб., семи институциональных единиц банковского сектора России, таких как: Альфа Банк (*ALP*), ВТБ 24 (*VTB*), Промсвязьбанк (*PSB*), Банк Петрокоммерц (*PKB*), Ханты-Мансийский Банк (*HMB*), Собинбанк (*SIB*), Новосибирский Муниципальный Банк (*NSB*). Все данные были получены из официальной отчетности банков, размещенной на сайте Банка России. Следует отдельно отметить, что выборка из перечисленных представителей банковского сектора была сформирована в рамках проведенного ранее исследования и стала результатом кластерного и факторного анализов банковской системы[6]. Временной интервал данных в работе был определен произвольным образом как период с 01.02.2008 по 01.10.2013, так как настоящее исследование по большей части носит методологический характер.

Изначально процесс обработки исходных данных заключался в переходе от абсолютных величин просроченной кредитной задолженности к относительным показателям. Так, были получены временные ряды, представляющие собой долю просроченной задолженности по соответствующим требованиям в общем кредитном портфеле каждого банка. После этого каждый соответствующий временной ряд прошел процедуру центрирования и нормирования в целях выравнивания динамичности данных.

Возвращаясь к процедурам построения и оценки модели, следует отметить, что традиционно для моделирования одномерных распределений используется нормальное распределение. При этом важно подчеркнуть, что не для всех рядов данных, которые использовались в настоящем исследовании, нормальное распределение являлось подходящим. Так, обращая свое внимание на значение вероятности превышения критических значений статистики Колмогорова-Смирнова для нормального распределения, отраженных в *табл. 1*, можно говорить о том, что гипотеза о нормальном распределении отклоняется для трех рядов при уровне значимости 0,05. Поэтому для моделирования одномерных распределений в работе использовалось асимметричное распределение Стьюдента, плотность которого задается формулой [12]:

$$d(z;\lambda;\eta) = \begin{cases} bc\left(1+\frac{1}{\eta-2}\cdot\left(\frac{bz+a}{1-\lambda}\right)^2\right)^{\frac{-\eta+1}{z}}, & z < -a/b \\ bc\left(1+\frac{1}{\eta-2}\cdot\left(\frac{bz+a}{1+\lambda}\right)^2\right)^{\frac{-\eta+1}{z}}, & z \geqslant -a/b \end{cases}, \quad (5)$$

где $a = 4c\lambda\left(\frac{\eta-2}{\eta-1}\right)$;

$b = \sqrt{1+3\lambda^2 - a^2}$;

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\eta-2)\,\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}};$$

η – число степеней свободы (хвостовой параметр);

λ – параметр асимметрии;

$\Gamma(x)$ – гамма-функция;

$z$ – анализируемая случайная величина.

По оцененным параметрам одномерных распределений, представленных в *табл. 1*, очевиден тот факт, что гипотеза об асимметричном

[6] *Скоблева Э.И., Князев А.Г., Лепёхин О.А., Казакова К.А.* Динамический анализ сегментации российского банковского сектора // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6. URL: http://science-education.ru/120-16784

распределении Стьюдента не отклоняется для всех рядов без исключения. Важно при этом отметить сильную асимметрию, присутствующую во всех рядах данных. Выбор копулы Клейтона, в свою очередь, в качестве парной модели основан в данном случае на анализе совместных разбросов значений рядов переменных. При проведении графического анализа отчетливо прослеживается левый нижний хвост, в то же время правый верхний хвост в большинстве случаев отсутствует. Ранее нами как раз было акцентировано внимание на том, что именно копула Клейтона позволяет наилучшим образом моделировать подобные зависимости.

Важно отметить, что оценки параметров копул в настоящем исследовании планируется получить с помощью байесовского метода. Для этого сначала необходимо получить априорное распределение параметра. Первичная выборка значений параметра в данном случае создается посредством метода моментов, а именно методом обращения коэффициента Кендалла на основе формулы (3). На *рис. 1* приведена иллюстрация гистограммы первичной выборки значений параметра.

По виду данной гистограммы можно сделать предположение, что параметр копулы имеет гамма-распределение. Помимо прочего, по выборке можно также оценить следующие параметры гамма-распределения: параметр масштаба $r$ = 0,457572 и параметр формы $s$ = 1,164896. При этом проверить указанное предположение о типе распределения параметра копулы возможно, выполнив тест Колмогорова-Смирнова (One-sample Kolmogorov-Smirnov test: data ACL D = 0,1162, $p$-value = 0,9085). Результат соответствующего теста показывает, что гипотеза о гамма-распределении в данном случае не отклоняется.

Далее для получения байесовских оценок параметров в исследовании будет применен алгоритм Метрополиса со случайным блужданием. Для реализации соответствующего метода был разработан алгоритм в программной среде *R*, продемонстрированный в *Приложении 1* к настоящей работе. При этом байесовские оценки параметров для пар исходных данных приведены в *табл. 2*. Кроме оценок параметров копул в данной сводной таблице отражены модельные значения коэффициентов корреляции Кендалла, которые можно сравнивать с выборочными значениями этого коэффициента. Корреляционная матрица исходных данных приведена в *табл. 3*.

Далее в настоящей работе необходимо осуществить переход к определению иерархической структуры и оценке параметров иерархических копул. Для этого целесообразно ввести следующие обозначения: $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$ для одномерных функций распределения переменных *ALP, VTB, PSB, PKB, KMB, SIB, NMB* соответственно. При этом важно отметить, что коэффициенты корреляции Кендалла для функций распределения те же, что и для исходных переменных. На первом шаге определения упомянутой структуры копулы необходимо выбрать пару *ALP*, *SIB*, имеющую наибольший коэффициент корреляции. Таким образом, на первом приближении строится функция совместного распределения, которая обозначается в дальнейшем $u_{16}$. На втором шаге аналогичным образом необходимо построить новую корреляционную матрицу, результаты которой представлены в *табл. 4*.

Наибольший элемент в этой матрице – коэффициент корреляции – соответствует паре $u_{16}$, $u_3$. Таким образом, на следующем шаге необходимо оценить параметр такой копулы – он оказывается равным 3,095. Далее целесообразно построить соответствующую функцию совместного распределения, которая в дальнейшем получает обозначение $u_{(16)3}$. После чего опять выполняется процедура построения уже новой корреляционной матрицы – и так процесс повторяется. Иерархическая структура, которая является результатом осуществления данного выработанного алгоритма, представлена на *рис. 2*.

Анализируя полученные результаты, важно отметить, что оценка параметра последней копулы получается на порядок выше значения, указанного в соответствующей таблице и принимает значение, равное 0,8318202. Однако подобная оценка нарушает условие сохранения копулярной структуры, в связи с чем принято считать данную оценку равной минимуму из оценок всех составляющих. Соответствующий минимум и указан в *табл. 5*.

Следующая формула демонстрирует явное выражение для соответствующей копулярной модели из семи переменных:

$$C(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7,) =$$

$$= ((((u_1^{-\alpha_1} + u_6^{-\alpha_1} - 1)^{\alpha_2/\alpha_1} + u_3^{-\alpha_2} - 1)^{\alpha_3/\alpha_2} + u_4^{-\alpha_3} - 1)^{\alpha_4/\alpha_3} +$$

$$+ u_5^{-\alpha_4} + (u_2^{-\alpha_5} + u_7^{-\alpha_5} - 1)^{\alpha_4/\alpha_5} - 2)^{-1/\alpha_4} . \qquad (6)$$

Финальным этапом настоящего исследования является процесс генерирования выборки из совместного распределения и построение прогноза просроченной кредитной задолженности. Необходимо подчеркнуть, что для генерирования выборки из совместного распределения целесообразно задействовать метод принятия-отклонения. В данном методе используется плотность совместного распределения, но ее вычисление для функции совместного распределения всех семи переменных является весьма затруднительным. В качестве решения для облегчения выполнения данной задачи можно использовать пошаговый метод принятия-отклонения. Так, на первом шаге создается выборка семи независимых случайных переменных, каждая из которых имеет асимметричное распределение Стьюдента с параметрами, указанными в *табл. 1*. На втором – выбираются из упомянутой выборки только те наблюдения, для которых первая и шестая переменные имеют совместное распределение, заданное копулой Клейтона с параметром $\alpha_1$ (см. *табл. 5*). На следующем шаге полученная ранее выборка просеивается – выбираются лишь те наблюдения, для которых функция совместного распределения первой и шестой переменных и третья переменная имеют совместное распределение, заданное копулой Клейтона с параметром $\alpha_2$. Далее соответствующий процесс продолжается в соответствии со схемой иерархической модели. Выполнение данного процесса должно сопровождаться вычислением константы, ограничивающей плотность соответствующей парной копулы. Следуя рекомендациям монографии [13], в качестве такой константы можно выбирать максимальное значение плотности соответствующей копулы на данной выборке.

Резюмируя изложенное, необходимо отметить, что процесс объединения исходных переменных в многомерную модель состоит из шести шагов. На каждом шаге объем выборки значительно сокращается. Так, изначально была сгенерирована выборка из семи независимых переменных, содержащая 100 000 наблюдений. Далее из данной выборки были получены от одного до трех наблюдений из совместного распределения, заданного иерархической моделью. Таким образом, повторяя необходимое число раз данный процесс, в конечном итоге была получена выборка, содержащая 100 наблюдений из совместного распределения.

В *табл. 6* приведена корреляционная матрица сгенерированной выборки. Безусловно, данная выборка сильно отличается от корреляционной матрицы исходной выборки, однако определенно значимые моменты зависимости иерархической структуры остались сохраненными. Так, наибольший коэффициент корреляции, как и в исходной выборке, представляет собой коэффициент между первой и шестой переменными.

Далее на основе сгенерированной ранее выборки целесообразно произвести расчет размера банковского резерва, необходимого на случай непредвиденных кредитных потерь. Примечательно, что вычисление соответствующего объема резервных требований можно осуществить двумя способами. К примеру, можно упорядочить по убыванию каждую переменную отдельно. При этом, взяв шестую варианту, возможно получить верхнюю границу одностороннего 95%-го доверительного интервала для объема просроченной кредитной задолженности, которую можно считать необходимым объемом соответствующего резерва. Также можно упорядочить всю выборку из семи переменных по убыванию значений выборочной функции распределения. После чего, как и раньше, необходимо выбрать шестое наблюдение и считать его верхней границей 95%-ной доверительной области. Рекомендуемые объемы резервов, а также реальные значения просроченной задолженности по кредитным требованиям приведены в *табл. 7*.

Анализируя полученные результаты прогнозирования, можно сделать следующие выводы. В подавляющем большинстве случаев рекомендуемые размеры резервных отчислений выглядят вполне адекватно – прогнозы оказались достаточными для покрытия реальных значений просроченной кредитной задолженности. Однако важно подчеркнуть, что в случае сравнения прогнозных значений с реальными объемами сформированных резервов прогноз, полученный посредством упорядочения выборки из семи переменных по убыванию значений выборочной функции распределения, оказался точнее первого варианта построения прогноза.

Подводя итоги, необходимо подчеркнуть следующее. Предложенный в настоящем исследовании подход к моделированию просроченной задолженности по кредитным требованиям с последующим прогнозированием является своеобразной альтернативой существующей методологии определения резерва на возможные кредитные потери, которая, в свою очередь, способствует обеспечению устойчивости финансового учреждения, а также сочетает в себе эффективность и рациональность действий в рамках стратегического управления банком. Продемонстрированная в работе копулярная модель с иерархической структурой в определенной степени может быть использована в качестве одного из возможных количественных методов оценки кредитного риска в системе банковского риск-менеджмента.

***Таблица 1***

**Параметры одномерных распределений**

***Table 1***

**Parameters of marginal distribution**

| Переменная | *P norm* | *Eta* | *Lambda* | *P ast* |
|---|---|---|---|---|
| *ALF* | 0,00127 | 4 | 0,99 | 0,3552 |
| *VTB* | 0,06783 | 22 | –0,75 | 0,6428 |
| *PSB* | 0,1663 | 22 | 0,31 | 0,59948 |
| *PKB* | 0,4115 | 22 | –0,29 | 0,7526 |
| *HMB* | 0,4764 | 22 | 0,71 | 0,47721 |
| *SIB* | 0,0208 | 22 | 0,5 | 0,29263 |
| *NSB* | 0,00119 | 4.8 | –0,47 | 0,08122 |

*Примечание. P norm, P ast* – вероятности превышения выборочных значений критических статистик, *Eta*, *Lambda* – полученные оценки параметров асимметричного распределения для рядов просроченной задолженности.
*Источник:* составлено авторами

*Note. P norm, P ast* – the probability of random values exceeding critical statistics, *Eta*, *Lambda* – assessed parameters of the asymmetric distribution for overdue debt series.
*Source:* Authoring

***Таблица 2***

**Байесовские оценки параметров парных копул**

***Table 2***

**Bayesian estimates of pair-copula parameters**

| Переменная | *A* | *Tau* |
|---|---|---|
| *ALP/PSB* | 3,0465 | 0,6037 |
| *ALP/VTB* | 0,3975 | 0,1658 |
| *PKB/ALP* | 1,4556 | 0,4212 |
| *HMB/ALP* | 0,4013 | 0,1671 |
| *SIB/ALP* | 4,8416 | 0,7077 |
| *NSB/ALP* | 0,5413 | 0,213 |
| *PSB/VTB* | 1,1382 | 0,3627 |
| *PKB/VTB* | 2,2616 | 0,5307 |
| *HMB/VTB* | 1,7164 | 0,4618 |
| *SIB/VTB* | 0,6205 | 0,2368 |
| *NSB/VTB* | 3,7974 | 0,655 |
| *PKB/PSB* | 3,6767 | 0,6477 |
| *HMB/PSB* | 0,9068 | 0,312 |
| *SIB/PSB* | 4,575 | 0,6958 |
| *NSB/PSB* | 1,3609 | 0,4049 |
| *HMB/PKB* | 1,5520 | 0,4369 |
| *SIB/PKB* | 2,4742 | 0,553 |
| *NSB/PKB* | 0,8564 | 0,2998 |
| *SIB/HMB* | 0,6496 | 0.2452 |
| *NSB/HMB* | 2,0652 | 0,508 |

*Примечание. A* – полученные байесовские оценки параметров для пар исходных данных рядов просроченной задолженности, *Tau* – модельные значения коэффициента корреляции Кендалла.
*Источник:* составлено авторами

*Note. A* – the Bayesian estimates of parameters for pairs of initial series of overdue debts, *Tau* – model values of the Kendall correlation coefficient.
*Source:* Authoring

***Таблица 3***

**Корреляционная матрица исходных переменных**

***Table 3***

**The correlation matrix of initial variables**

| **Переменная** | ***ALP*** | ***VTB*** | ***PSB*** | ***PKB*** | ***HMB*** | ***SIB*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *VTB* | 0,20 | 1 | … | … | … | … |
| *PSB* | 0,7 | 0,42 | 1 | … | … | … |
| *PKB* | 0,55 | 0,54 | 0,74 | 1 | … | … |
| *HMB* | 0,05 | 0,46 | 0,26 | 0,39 | 1 | … |
| *SIB* | 0,83 | 0,25 | 0,76 | 0,6 | 0,13 | 1 |
| *NSB* | 0,29 | 0,61 | 0,54 | 0,59 | 0,56 | 0,35 |

*Источник:* составлено авторами

*Source:* Authoring

***Таблица 4***

**Корреляционная матрица для второго шага**

***Table 4***

**The correlation matrix for the second step**

| **Параметр** | $\boldsymbol{u_{16}}$ | $\boldsymbol{u_2}$ | $\boldsymbol{u_3}$ | $\boldsymbol{u_4}$ | $\boldsymbol{u_5}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_2$ | 0,24 | 1 | … | … | … |
| $u_3$ | 0,74 | 0,42 | 1 | … | … |
| $u_4$ | 0,59 | 0,54 | 0,74 | 1 | … |
| $u_5$ | 0,08 | 0,46 | 0,26 | 0,39 | 1 |
| $u_7$ | 0,32 | 0,61 | 0,54 | 0,59 | 0,56 |

*Источник:* составлено авторами

*Source:* Authoring

***Таблица 5***

**Оценки параметров парных копул иерархической модели**

***Table 5***

**Estimated parameters of pair copulas of the hierarchical model**

| **Копула** | **Параметр *Alpha*** | | **Модельное значение *Tau*** |
|---|---|---|---|
| $u_1, u_6$ | $\alpha_1$ | 4,8416 | 0,7077 |
| $u_{16}, u_3$ | $\alpha_2$ | 3,0958726 | 0,6075255 |
| $u_{163}, u_4$ | $\alpha_3$ | 1,6051635 | 0,4452401 |
| $u_2, u_7$ | $\alpha_5$ | 3,7974 | 0,655 |
| $u_{1634}, u_5$ | $\alpha_4$ | 0,7117996 | 0,2624824 |
| Все | $\alpha_4$ | 0,7117996 | 0,2624824 |

*Источник:* составлено авторами

*Source:* Authoring

***Таблица 6***

**Корреляционная матрица сгенерированной выборки**

***Table 6***

**The correlation matrix of the generated sample**

| Параметр | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_2$ | 0,02477 | 1 | 0,007165 | 0,164381 | 0,023541 | 0,060798 |
| $u_3$ | 0,660594 | 0,007165 | 1 | 0,315456 | 0,223746 | 0,584442 |
| $u_4$ | 0,350256 | 0,164381 | 0,315455 | 1 | 0,170522 | 0,360901 |
| $u_5$ | 0,285568 | 0,023541 | 0,223746 | 0,170522 | 1 | 0,321597 |
| $u_6$ | 0,710133 | 0,060798 | 0,584442 | 0,360901 | 0,321597 | 1 |
| $u_7$ | –0,11607 | 0,470215 | –0,15824 | 0,111975 | 0,004708 | –0,04156 |

*Источник:* составлено авторами

*Source:* Authoring

***Таблица 7***

**Анализ эффективности формирования банковского резерва на покрытие потерь**

***Table 7***

**An analysis of the efficiency of the banking provision for losses**

| Показатель | | *ALP* | *VTB* | *PSB* | *PKB* | *KMB* | *SIB* | *NMB* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Реальное значение просроченной задолженности | | 0,037 | 0,055 | 0,037 | 0,087 | 0,021 | 0,073 | 0,054 |
| Реальное значение сформированного резерва на случай непредвиденных кредитных потерь | | 0,076 | 0,077 | 0,055 | 0,134 | 0,061 | 0,164 | 0,089 |
| Спрогнозированное значение просроченной задолженности | Отдельно | 0,141 | 0,067 | 0,104 | 0,144 | 0,027 | 0,247 | 0,203 |
| | Вместе | 0,052 | 0,071 | 0,051 | 0,124 | 0,028 | 0,156 | 0,176 |

*Примечание.* Значения показателей выражены в относительных величинах.
*Источник:* составлено авторами

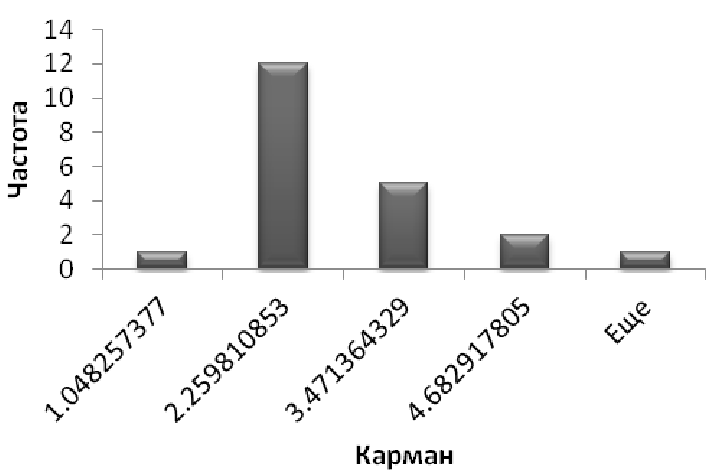
*Note.* Indicators are expressed in relative values.
*Source:* Authoring

***Рисунок 1***

**Гистограмма первичной выборки параметра копулы**

***Figure 1***

**Histogram of the primary selection of the copula parameter**




*Источник:* составлено авторами

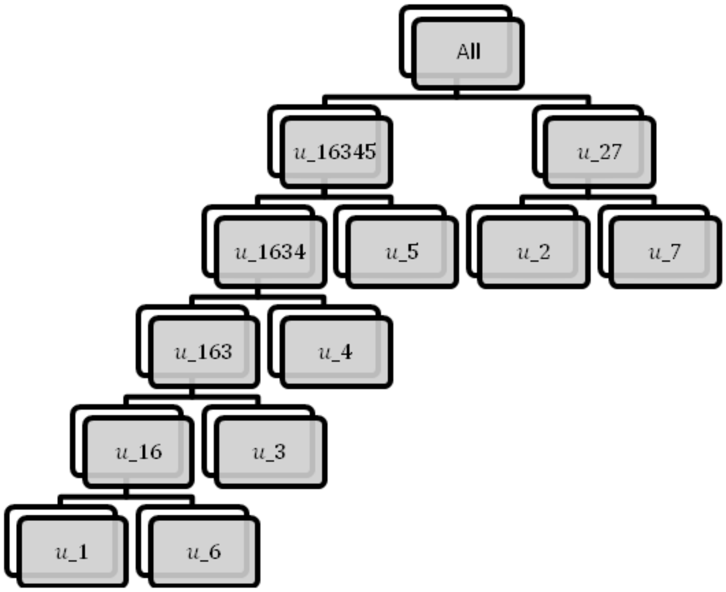
*Source:* Authoring

***Рисунок 2***

**Иерархическая структура модели**

***Figure 2***

**Hierarchical structure of the model**




*Источник:* составлено авторами

*Source:* Authoring

***Приложение 1***

**Алгоритм оценки параметра копулы Клейтона для *R***

***Appendix 1***

**Algorithm of the assessment of Clayton's copula parameter for *R***

```
#logarithmic density function
ldcl<-function(u,v,a){fa<-log(a+1)-(a+1)*(log(u)+log(v))-(2+1/a)*log(u^(-a)+v^(-a)-1)
return(fa)}
#Metropolys
metrocl2<-function(u,v,n,sigma,b0){
b<-b0; acra<-0; B<-0
for(k in 1:n){
r<-rnorm(1,log(b),sigma)
a<-exp(r)
LLH<-sum(ldcl(u,v,a)-ldcl(u,v,b))
LH<-exp(LLH)
G<-((a/b)^0.164896)*exp(0.457572*(b-a))
if(LH*G>runif(1)){b<-a; acra=acra+1}
B<-B+b}
A<-B/n; tau<-A/(A+2); Acra<-acra/n; res<-c(A,Acra,tau)
return(res)}
```

*Источник:* составлено авторами

*Source:* Authoring

**Список литературы**

1. *Бологов Я.В.* Оценка риска кредитного портфеля с использованием копула-функций. М.: Синергия Пресс, 2013. 22 с.

2. *Фантаццини Д.* Управление кредитным риском // Прикладная эконометрика. 2008. Т 12. № 4. С. 84–137.

3. *Фантаццини Д.* Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском // Прикладная эконометрика. 2008. Т. 10. № 2. С. 105–138.

4. *Фантаццини Д.* Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций // Прикладная эконометрика. 2011. № 2. С. 98–134.

5. *Nelsen R.B.* An Introduction to Copulas. New York, Springer, 2006. 269 p.

6. *Aas K., Czado C., Frigessi A., Bakken H.* Pair-copula constructions of multiple dependence // Insurance: Mathematics and Economics. 2009. Vol. 44. Iss. 2. P. 182–198. URL: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.02.001

7. *Czado C., Brechmann E.C., Gruber L.* Selection of Vine Copulas. In: Copulae in Mathematical and Quantitative Finance. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

8. *Травкин А.И.* Построение конструкций из парных копул на основе эмпирических копул хвостов на примере российского рынка акций: материалы XV Апрельской международной научной конференции по проблемам развития экономики и общества. М.: НИУ ВШЭ, 2015. Кн. 1. С. 387–400.

9. *Hering C., Hofert M., Mai J.-F., Scherer M*. Constructing nested Archimedean copulas with Lévy subordinators // Journal of Multivariate Analysis. 2010. Vol. 101. P. 1428–1433. URL: https://doi.org/10.1016/j.jmva.2009.10.005

10. *Hofert M., Scherer M.* CDO pricing with nested Archimedean copulas // Quantitative Finance. 2011. Vol. 11. Iss. 5. P. 775–787. URL: http://dx.doi.org/10.1080/14697680903508479

11. *Hofert M., Mächler M., McNeil A.J.* Archimedean Copulas in High Dimensions: Estimators and Numerical Challenges Motivated by Financial Applications // Journal de la Société Française de Statistique. 2013. Vol. 154. Iss. 1. P. 25–63.

12. *Hansen B.E.* Autoregressive conditional density estimation // International Economic Review. 1994. Vol. 35. Iss. 3. P. 705–730.

13. *Bolstad W.M.* Introduction to Bayesian Statistics: Second Edition. John Wiley & Sons, 2007. 464 p.

**Информация о конфликте интересов**

Мы, авторы данной статьи, со всей ответственностью заявляем о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи. Настоящее заявление относится к проведению научной работы, сбору и обработке данных, написанию и подготовке статьи, принятию решения о публикации рукописи.

**ISSN 2311-875X (Online)**
**ISSN 2073-2872 (Print)**

*National Interests*

**HIERARCHICAL COPULA IN CREDIT RISK MODELING**

**Kristina A. KAZAKOVA[a,•], Aleksandr G. KNYAZEV[b], Oleg A. LEPEKHIN[c]**

[a] Astrakhan State University, Astrakhan, Russian Federation
kristinakazakova0309@gmail.com

[b] Astrakhan State University, Astrakhan, Russian Federation
agkniazev@mail.ru

[c] Astrakhan State University, Astrakhan, Russian Federation
okmb07@yandex.ru

• Corresponding author

**Article history:**
Received 28 April 2017
Received in revised form
15 May 2017
Accepted 9 June 2017
Available online 28 June 2017

**JEL classification:** C58, G17

https://doi.org/10.24891/ni.13.6.1032

**Keywords:** bank reserve, credit risk, overdue credit indebtedness, copula model, forecasting

**Abstract**
**Importance** This research outlines an economic and mathematical model of the overdue loan debt. The model is based on copula functions allowing to simulate the non-Gaussian allocation of financial risks and credit risk, in particular.
**Objectives** The research models the joint allocation of overdue debt series in order to forecast the credit risk exposure. Relying upon the forecasting results, we intend to evaluate the efficiency of methods used to make provisions for possible losses and subsequently determine a reasonable approach to accruing the provision.
**Methods** We examine whether hierarchical copula models can be applied to build the joint allocation of overdue loan debt series in relation to banking institutions. It is considered as the basis for making further estimates of the overdue loan debt.
**Results** We build and evaluate a multivariate copula model of overdue loan indebtedness with the hierarchical structure. Based on the modeled multivariate correlation, we forecasted indicators of the overdue loan debt, which could be used as estimated provisions for credit losses. The estimated provisions turn to be sufficient for covering the real amount of overdue debt, being, in most cases, much less that that indicated in Regulation of the Central Bank of the Russian Federation № 254-П *On Rates of Provisions for Loan Losses*.
**Conclusions and Relevance** The multivariate copula model of the overdue loan debt can underlie effective risk management systems in credit institutions.



## References

1. Bologov Ya.V. *Otsenka riska kreditnogo portfelya s ispol'zovaniem kopula-funktsii* [Assessing the risk exposure of the credit portfolio using the copula function]. Moscow, Sinergiya Press Publ., 2013, 22 p.

2. Fantazzini D. [Credit risk management]. *Prikladnaya ekonometrika = Applied Econometrics*, 2008, vol. 12, iss. 4, pp. 84–137. (In Russ.)

3. Fantazzini D. [An econometric analysis of financial data in risk management]. *Prikladnaya ekonometrika = Applied Econometrics*, 2008, vol. 10, iss. 2 pp. 105–138. (In Russ.)

4. Fantazzini D. [Modeling of multidimensional probability distributions with copula functions]. *Prikladnaya ekonometrika = Applied Econometrics*, 2011, vol. 2, iss. 2, pp. 98–134. (In Russ.)

5. Nelsen R.B. An Introduction to Copulas. New York, Springer, 2006, 269 p.

6. Aas K., Czado C., Frigessi A., Bakken H. Pair-Copula Constructions of Multiple Dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, vol. 44, iss. 2, pp. 182–198. URL: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.02.001

7. Czado C., Brechmann E.C., Gruber L. Selection of Vine Copulas. In: Copulae in Mathematical and Quantitative Finance. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

8. Travkin A.I. [Designing paired-copula constructs on the basis of empirical tails of copula: Evidence from the Russian market of shares]. *XV Aprel'skaya mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya po problemam razvitiya ekonomiki i obshchestva: materialy konferentsii* [Proc. Sci. Conf. The 15th April International

Scientific Conference on Development Issues of the Economy and Society]. Moscow, NRU HSE Publ., 2015, vol. 1, pp. 387–400.

9. Hering C., Hofert M., Mai J.-F., Scherer M. Constructing Nested Archimedean Copulas with Lévy Subordinators. *Journal of Multivariate Analysis*, 2010, vol. 101, iss. 6, pp. 1428–1433. URL: https://doi.org/10.1016/j.jmva.2009.10.005

10. Hofert M., Scherer M. CDO Pricing with Nested Archimedean Copulas. *Quantitative Finance*, 2011, vol. 11, iss. 5, pp. 775–787.URL: http://dx.doi.org/10.1080/14697680903508479

11. Hofert M., Mächler M., McNeil A.J. Archimedean Copulas in High Dimensions: Estimators and Numerical Challenges Motivated by Financial Applications. *Journal de la Société Française de Statistique*, 2013, vol. 154, iss. 1, pp. 25–63.

12. Hansen B.E. Autoregressive Conditional Density Estimation. *International Economic Review*, 1994, vol. 35, iss. 3, pp. 705–730.

13. Bolstad W.M. Introduction to Bayesian Statistics: Second Edition. John Wiley & Sons, 2007, 464 p.

**Conflict-of-interest notification**

We, the authors of this article, bindingly and explicitly declare of the partial and total lack of actual or potential conflict of interest with any other third party whatsoever, which may arise as a result of the publication of this article. This statement relates to the study, data collection and interpretation, writing and preparation of the article, and the decision to submit the manuscript for publication.