

ОПИСАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ МИРОВОГО ВВП НА КОРОТКИХ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Анатолий Анатольевич КИЛЯЧКОВ^a, Лариса Алексеевна ЧАЛДАЕВА^{b,*},
Николай Анатольевич КИЛЯЧКОВ^c

^a кандидат технических наук, менеджер компании ЕУ, Москва, Российская Федерация
AAKil@mail.ru

^b доктор экономических наук, профессор кафедры экономики организации, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация
chaldaeva45@mail.ru

^c соискатель кафедры экономической теории, Московский государственный институт международных отношений (Университет), Москва, Российская Федерация
NKil@hotmail.ru

* Ответственный автор

История статьи:

Принята 01.10.2015
Одобрена 21.10.2015

УДК 330.313, 336.77
JEL: C02, E10, E320

Ключевые слова: неподвижные устойчивые точки, устойчивые циклы, области динамической устойчивости, области сходимости, фрактальные структуры

Аннотация

Предмет. Мировая экономика испытывает периодические изменения темпов роста ВВП, которые регулярно перерастают в экономические кризисы. Построение модели, которая сможет описать этот процесс, представляет значительный научный и практический интерес. Ранее авторами была разработана бифуркационная модель, в которой был предложен механизм возникновения экономических циклов как результат удвоения (бифуркации) некоторого базового цикла. Впоследствии эта модель получила название дискретной динамической модели.

Цели. Проверка дискретной динамической модели на коротких временных интервалах.

Методология. Предложенная дискретная динамическая модель была подготовлена с использованием информации о темпах роста мирового ВВП, полученной на сайте Мирового банка. Для определения коэффициентов аппроксимирующих полиномов использовался метод наименьших квадратов со скользящим интервалом аппроксимации. Наиболее приемлемой длительностью интервала, который следует использовать для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома, является интервал длительностью пять лет. Для оценки точности аппроксимации статистических данных был использован коэффициент детерминации.

Результаты. Предложенная модель описывает динамику мировой экономики на коротких временных интервалах. В результате исследования получены качественные характеристики модели, к которым относятся области сходимости, неподвижные устойчивые точки, устойчивые циклы и области динамической устойчивости. Причем области сходимости представляют собой фрактальные структуры.

Выводы. Сопоставление со статистическими данными показало, что значения темпов роста ВВП мировой экономики совпадают с областями сходимости дискретной динамической модели, что указывает на важность изучения ее качественных характеристик для описания глобальных экономических процессов.

© Издательский дом ФИНАНСЫ и КРЕДИТ, 2015

Мировая экономика испытывает периодические изменения темпов роста ВВП, которые регулярно перерастают в экономические кризисы. Модель, которая позволит описать этот процесс, представляет значительный научный и практический интерес. Ранее была предложена модель¹, в которой возникновение экономических циклов является следствием предположения о том, что темпы роста ВВП в последующем году зависят от темпов роста ВВП в предыдущем году. В этой модели все известные к настоящему времени

экономические циклы представляют собой удвоение (бифуркацию) некоторого базового цикла. Поэтому предложенная модель первоначально получила название бифуркационной. Однако по мере развития эта модель позволила описать и другие эффекты, так что впоследствии она получила название дискретной динамической модели (ДДМ).

В модели значение темпа роста ВВП в $(n + 1)$ -м году зависит от его значения в предыдущем n -м году и от двух коэффициентов, один из которых описывает способность экономики обеспечить увеличение темпов роста, а второй ограничивает

¹ Чалдаева Л.А., Килячков А.А. Унифицированный подход к описанию природы экономических циклов // Финансы и кредит. 2012. № 45. С. 2–8.

этот рост. Такая зависимость описывается формулой

$$X_{n+1}^* = \lambda X_n^* - \gamma X_n^{*2}, \quad (1)$$

где X_{n+1}^* – темпы роста ВВП в $(n + 1)$ -м году;

X_n^* – темпы роста ВВП в предыдущем n -м году;

λ – коэффициент, описывающий возможность экономики обеспечить увеличение темпов роста ВВП;

γ – коэффициент, учитывающий ограничения на темпы роста ВВП, существующие в экономике.

Разделив слагаемые выражения (1) на $N = 1 / \gamma$ и произведя в нем замену переменных $X_{n+1} = X_{n+1}^* / N$; $X_n = X_n^* / N$, получаем выражение следующего вида [1–4]:

$$X_{n+1} = \lambda X_n (1 - X_n). \quad (2)$$

Параметр N , присутствующий в модели, представляет собой отношение суммарного эффекта от факторов, обеспечивающих увеличение темпов роста λ , и факторов, уменьшающих темпы роста γ . Этот показатель характеризует все факторы, влияющие на экономический рост, при этом точное знание о них и понимание их природы не предполагается. Параметр N можно назвать «восприимчивость экономики к экономическому росту».

Факторы, обеспечивающие экономический рост, могут иметь следующую природу:

- ресурсную (имеются ли в стране достаточные сырьевые, энергетические, трудовые ресурсы, чтобы обеспечить экономический рост);
- технологическую (имеются ли технологии, необходимые, чтобы организовать соответствующие производства или наладить управление на необходимом уровне);
- финансовую (есть ли у инвесторов необходимые финансовые ресурсы, могут ли они привлечь недостающие средства от государства, на внутреннем рынке или за рубежом);
- политическую (имеются ли государственные программы развития, каков уровень налогообложения, высок ли уровень коррупции);
- предпринимательскую (существует ли нужное количество проектов для инвестирования);
- институциональную (существуют ли институты, способные свести вместе проект, инвестора и ресурсы и обеспечить реализацию проектов).

Хотя в данной модели «восприимчивость экономики к экономическому росту» N предполагалась постоянной, в реальности коэффициенты λ и γ зависят от времени. Однако в периоды устойчивого развития для небольших временных интервалов они могут считаться постоянными. Наоборот, в периоды быстро изменяющихся условий развития ключевые факторы производства и конкурентные преимущества претерпевают быстрые и значительные изменения. При этом восприимчивость экономики к факторам, обеспечивающим ее рост, также быстро меняется.

В настоящее время известны экономические циклы Дж. Китчина [5] и К. Жюгляра [6], ритмы С. Кузнеця [7] и волны Н. Кондратьева [8, 9]. Считается, что эти циклы имеют различную экономическую природу² [9–12]. Однако предложенная модель позволила качественно и единым образом описать эти циклы как результат удвоения периода некоторого базового цикла ($T = 3$ года) при увеличении значения коэффициента λ . Каскады удвоений были описаны в работах [3, 4, 13–19]. Кроме того, предложенная модель позволила объяснить существование цикла с периодом $T = 35 \pm 5$ лет. Наличие этого цикла было показано в работе А. Коротаева и С. Циреля [20], в которой был проведен спектральный анализ темпов роста мирового ВВП с 1871 по 2007 г.

Однако дискретная динамическая модель, описываемая формулой (2), обладает рядом недостатков. Так, при устойчивом развитии в ней возможны только положительные темпы роста. Причем отрицательные темпы роста возникают в этой модели только при протекании необратимых процессов. Чтобы описать чередование отрицательных и положительных темпов экономического роста, необходимо использовать несколько более сложную модель, имеющую следующий вид³:

$$X_{n+1} = \lambda X_n (1 - X_n^2).$$

Эта модель позволяет описать чередование отрицательных и положительных темпов экономического роста, то есть она более адекватно описывает наблюдаемые экономические процессы

² Forrester J. New Perspectives on Economic Growth // Meadows D. (ed.) Alternatives to Growth -A Search for Sustainable Futures. Cambridge, MA: Ballinger. 1977. P. 107–121.

³ Kilyachkov A., Chaldaeveva L. Bifurcational Model of Economic Cycles // North American Academic Journals. Economic Papers and Notes. 2013. Vol. 13. № 4. P. 13–20.

[2, 21]. Проверка достоверности предложенной дискретной динамической модели для описания темпов роста мирового ВВП на длительных временных интервалах была изложена в работе⁴. Проведенные исследования показали, что темпы роста мирового ВВП с достаточно высокой степенью точности описываются полиномом третьей степени. Причем зависимость X_{n+1} от X_n содержит все слагаемые аппроксимирующего полинома, который имеет вид:

$$X_{n+1} = \alpha_0 - \alpha_1 X_n + \alpha_2 X_n^2 - \alpha_3 X_n^3. \quad (3)$$

Однако не меньший интерес представляет использование предложенной модели для описания динамики изменения ВВП на коротких временных интервалах. Это позволит проследить динамику изменения факторов, влияющих на темпы экономического развития.

Как уже упоминалось, в предложенной дискретной динамической модели коэффициенты аппроксимирующего полинома являются функциями времени. Когда состояние мировой экономики изменяется не очень быстро, то коэффициенты в течение нескольких лет можно считать постоянными, что дает возможность определить их значения, используя информацию о темпах роста мирового ВВП. Для полиномов третьей степени, имеющих четыре коэффициента, минимальный интервал, который необходим для вычисления этих коэффициентов, равен четырем годам. Однако даже и в этом случае незначительное изменение коэффициентов, вызванное различными причинами, может значительно исказить конечный результат. Поэтому целесообразно несколько увеличить временной интервал, который будет использован для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома, чтобы уменьшить влияние небольшого изменения его коэффициентов за рассматриваемый промежуток времени. Вместе с тем чрезмерное увеличение временного интервала также нецелесообразно, так как в этом случае коэффициенты аппроксимирующего полинома могут значительно измениться, что приведет к более низкой точности аппроксимации. В результате выполненных исследований было установлено, что наиболее приемлемым интервалом, который следует использовать для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома, является интервал длительностью $\Delta t = 5$ лет. Хотя в отдельных случаях более предпочтительными являются

интервалы, равные 7 годам (1977, 1978, 1985, 2005, 2006, 2008 гг.), 9 годам (1966 и 1971 гг.) и даже 11 годам (1970 г.). Информация о темпах роста мирового ВВП была получена на сайте Мирового банка⁵.

Коэффициенты аппроксимирующих полиномов не удалось определить для 1962 г. и 1991–1993 гг. Эта ситуация возникала в тех случаях, когда увеличение интервала аппроксимации с четырех до пяти лет приводило к значительному снижению точности аппроксимации. Другими словами, на временном интервале, который равен четырем годам и является минимально необходимым для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома, изменение коэффициентов было настолько значительно, что это не позволило построить систему уравнений для вычисления их значений.

Зависимость от времени точности аппроксимации темпов изменения ВВП и длительности интервалов, которые были использованы для определения коэффициентов аппроксимирующих полиномов, приведена на рис. 1.

Для оценки точности аппроксимации статистических данных был использован коэффициент детерминации, который вычисляется по формуле

$$R^2 = 1 - \sigma^2 / \sigma_y^2,$$

где σ^2 – дисперсия случайной величины относительно аппроксимирующего полинома;

σ_y^2 – дисперсия случайной величины относительно среднего значения.

Коэффициент детерминации R^2 принимает значения между 0 и 1. Чем ближе его значения к 1, тем с большей точностью аппроксимирующая функция описывает экспериментальные данные. При значениях R^2 больших, чем 0,3, точность аппроксимации уже можно считать удовлетворительной, так как квадратный корень этой величины, который собственно и дает точность аппроксимации, будет превышать 0,5.

Дальнейший анализ полученной совокупности многочленов третьей степени, отличающихся значением коэффициентов, целесообразно осуществлять путем изучения их качественных характеристик, к которым относятся области сходимости, неподвижные устойчивые точки, устойчивые циклы и области динамической устойчивости. В общем случае проблема определения качественных характеристик

⁴ Чалдаева Л.А., Килячков А.А. Модель обратной связи и ее использование для описания динамики экономического развития // Финансы и кредит. 2014. № 31. С. 2–8.

⁵ URL: <http://data.worldbank.org/indicator>

полиномов третьей степени является нерешенной задачей [21]. Поэтому для их определения авторы использовали подход, который позволяет получить частное решение поставленной задачи и заключается в изучении поведения аппроксимирующих полиномов при возрастании времени.

В результате проведенных исследований были выявлены области сходимости аппроксимирующих полиномов, представленные на рис. 2.

Под областью сходимости аппроксимирующих полиномов понимается диапазон начальных значений аргумента X_n , которые обеспечивают стремление функции к неподвижной устойчивой точке, устойчивому циклу или области динамической устойчивости. Анализ рис. 2 свидетельствует, что кроме тех случаев, когда не удастся определить значение коэффициентов аппроксимирующих полиномов (1962, 1991–1993 гг.), аппроксимирующие полиномы не имеют областей сходимости в следующие периоды времени: 1963–1965 гг., 1967–1969 гг., 1971–1973 гг., 1979–1982 гг., 1986–1988 гг., 1997, 1998, 2002, 2006, 2008 и 2009 гг.

Под неподвижной устойчивой точкой понимается значение, к которому стремится аппроксимирующий полином при возрастании времени, то есть при последовательном применении формулы (3). Неподвижные устойчивые точки совмещены с областями сходимости аппроксимирующих полиномов (рис. 3а).

Характерная динамика зависимости X_{n+1} от n при наличии неподвижной устойчивой точки представлена на рис. 4а для аппроксимирующего полинома, который отвечает 2010 г. Обращает на себя внимание наличие двух неподвижных устойчивых точек для аппроксимирующих полиномов, которые отвечают 1983 и 1995 гг. Такая ситуация предшествует возникновению устойчивого цикла.

Устойчивым циклом называется такое поведение аппроксимирующего полинома, при котором с возрастанием времени изменение его значений становится периодическим с постоянным периодом. Устойчивый цикл может представлять собой сумму нескольких циклов с различными периодами. На рис. 3б устойчивые циклы совмещены с областями сходимости аппроксимирующих полиномов. Характерная зависимость поведения X_{n+1} от времени при

наличии устойчивого цикла приведена на рис. 4б для аппроксимирующего полинома, отвечающего 1984 г.

Областью динамической устойчивости называется область, в которой происходит циклическое изменение значения функции, не имеющее выраженной периодичности. Области динамической устойчивости совмещены с областями сходимости аппроксимирующих полиномов (рис. 3). Характерная зависимость поведения X_{n+1} от времени при наличии динамической устойчивости для аппроксимирующего полинома, отвечающего 1975 г., представлена на рис. 4в.

Реальная динамика темпов изменения мирового ВВП (рис. 5) сопоставлена с теоретической кривой, построенной с использованием формулы (3), то есть для вычисления темпов роста ВВП в $(n+1)$ -м году использовался аппроксимирующий полином для n -го года. Анализ рис. 5 свидетельствует, что при наличии областей сходимости реальные значения темпов роста ВВП практически всегда находятся в области сходимости соответствующих аппроксимирующих полиномов. Кроме того, вычисленные значения темпов роста ВВП хорошо совпадают с реальными данными. Наибольшее расхождение наблюдается в области 1979–1982 гг., где отсутствуют области сходимости соответствующих аппроксимирующих полиномов.

Приведенные результаты свидетельствуют, что для понимания динамики изменения мирового ВВП необходимо исследовать области сходимости аппроксимирующих полиномов. Для построения областей сходимости была использована следующая методика. В качестве начального значения в полином (3) подставляется некоторое значение X_{n+1} , после чего полученное уравнение третьей степени решается относительно X_n . Полученное в результате решение используется в качестве начального значения в уравнении (3) для второй итерации. Уравнение решается относительно X_{n-1} , и полученное решение используется в качестве начального значения для третьей итерации и т.д. Как показали исследования, уже на 8–9-й итерации получают четкие области для комплексных значений X_n . Полученные результаты представлены на рис. 6–8.

В том случае, когда полином, описывающий поведение ВВП для некоторого года, характеризуется наличием неподвижной устойчивой точки, его область сходимости имеет ярко выраженную замкнутую структуру (рис. 6).

Причем если этот полином имеет две неподвижные устойчивые точки (1983 и 1995 гг.), то отвечающая ему область сходимости состоит из двух отдельных, но взаимосвязанных частей.

В том случае, когда полином, описывающий поведение ВВП для некоторого года (см. рис. 7), характеризуется наличием устойчивого цикла, его область сходимости также имеет ярко выраженную замкнутую область, как и в случае неподвижной устойчивой точки, однако граница этой области более размыта, то есть имеет более «изошренную» конфигурацию.

Анализ данных рис. 8 свидетельствует, что области сходимости аппроксимирующих полиномов, отвечающие динамической устойчивости, не имеют ярко выраженной замкнутой области сходимости.

Следует отметить, что полученные области сходимости являются самоподобными, образуя фракталы [22, 23]. Другими словами, меньшие структуры получаются из более крупных структур путем пропорционального сжатия, сдвига и в некоторых случаях поворота на 180° (рис. 9).

Представляет интерес сопоставление процессов, происходивших в мировой экономике в отдельные годы, и качественных характеристик предложенной дискретной динамической модели.

1. В 1962 г. произошел Карибский кризис. Можно предположить, что угроза ядерной войны угнетающе воздействовала на инвестиции и экономический рост. Поэтому для модели наблюдаем невозможность построения

аппроксимирующего полинома (1962 г.) и отсутствие областей сходимости (1963–1965 гг.).

2. В 1968–1973 гг. произошел кризис Бреттон-Вудской валютной системы и переход на Ямайскую валютную систему. В модели для периодов 1967–1969 гг. и 1971–1973 гг. отсутствуют области сходимости.
3. В Великобритании под руководством М. Тэтчер с 1979 г., а в США под руководством Р. Рейгана с 1981 г. произошли коренные изменения в экономической политике, связанные с переходом от кейнсианства к неоконсерватизму. В модели в этот период времени (1979–1982 гг.) отсутствуют области сходимости аппроксимирующих полиномов.
4. В 1991–1993 гг. произошло изменение конфигурации мировой рыночной системы, обусловленное отказом большой группы государств от плановой экономики. В этот же период времени для дискретной динамической модели невозможно построить аппроксимирующие полиномы.
5. В 1997–1998 гг. произошел азиатский финансовый кризис. В этот же период времени в модели отсутствуют области сходимости.
6. Наконец, 2008 г. – мировой экономический кризис. В модели в 2008 и 2009 гг. отсутствуют области сходимости.

Приведенные данные позволяют сделать вывод о важности качественных характеристик дискретной динамической модели, в первую очередь наличия областей сходимости, для понимания текущего состояния экономики.

Рисунок 1

Точность аппроксимации темпов изменения мирового ВВП полиномами третьей степени и длительность интервалов времени, которые были использованы для определения значений коэффициентов аппроксимирующих полиномов

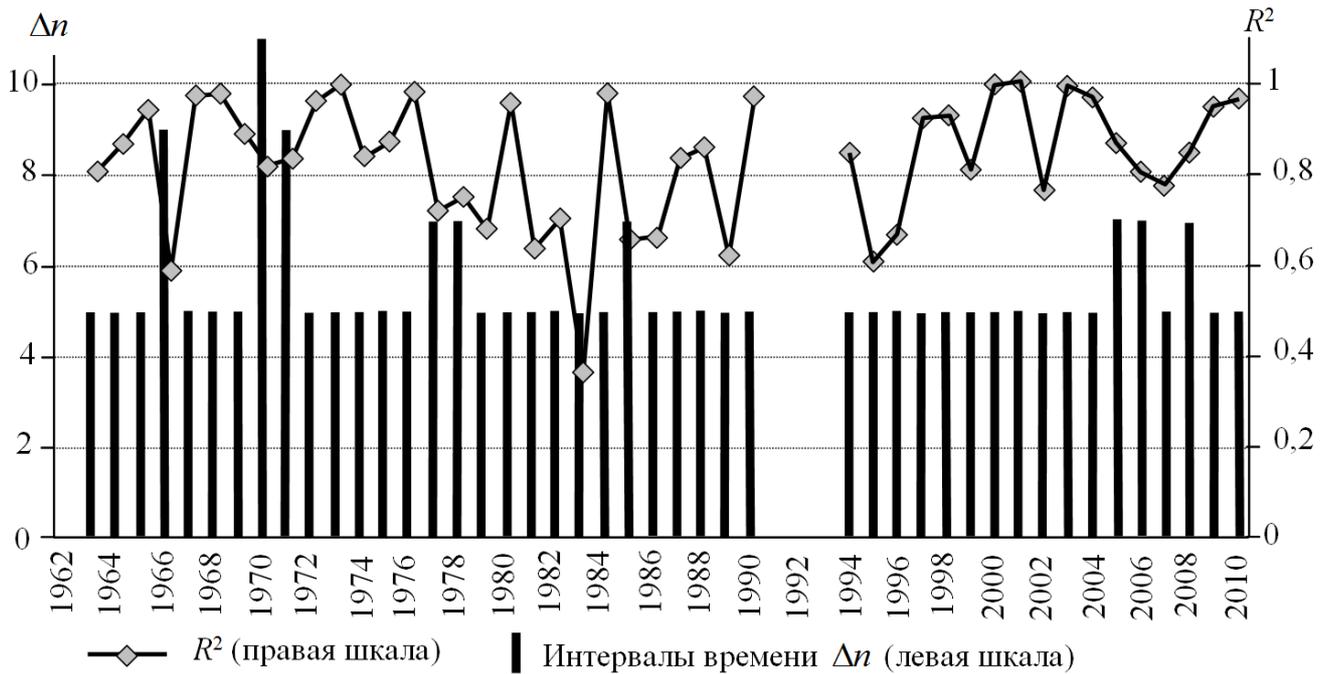


Рисунок 2

Области сходимости аппроксимирующих полиномов, которые соответствуют различным годам аппроксимации t с 1962 по 2010 г.

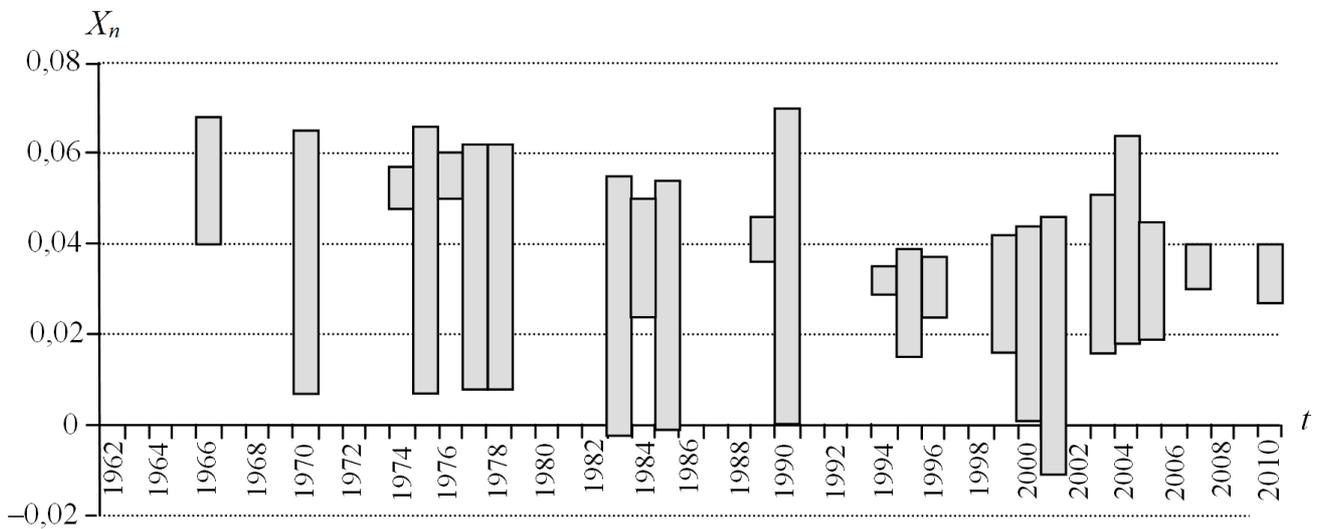


Рисунок 3

Неподвижные устойчивые точки, совмещенные с областями сходимости аппроксимирующих полиномов:
 a – соответствует 2010 г.; b – соответствует 1984 г.; $в$ – соответствует 1975 г.

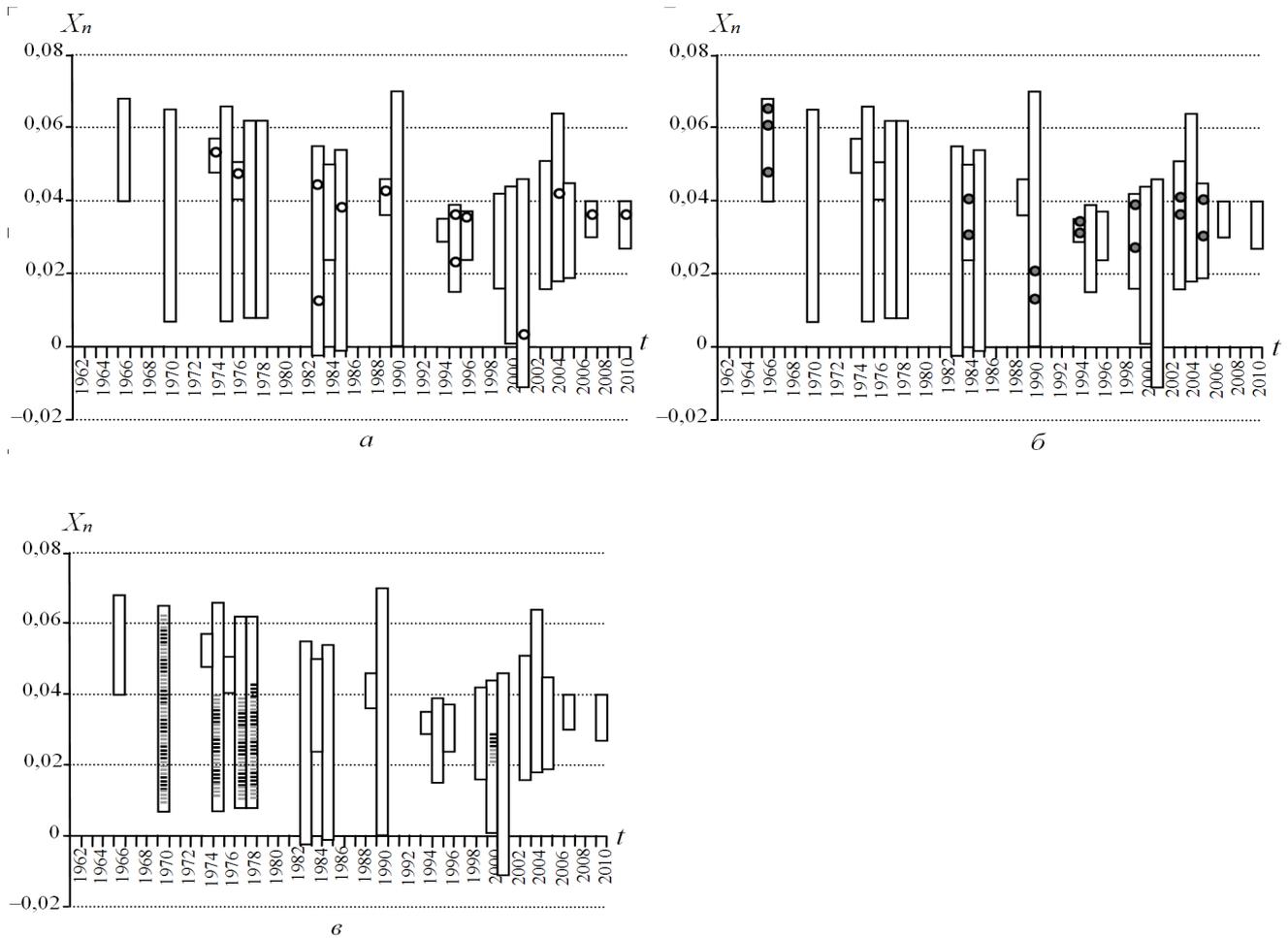
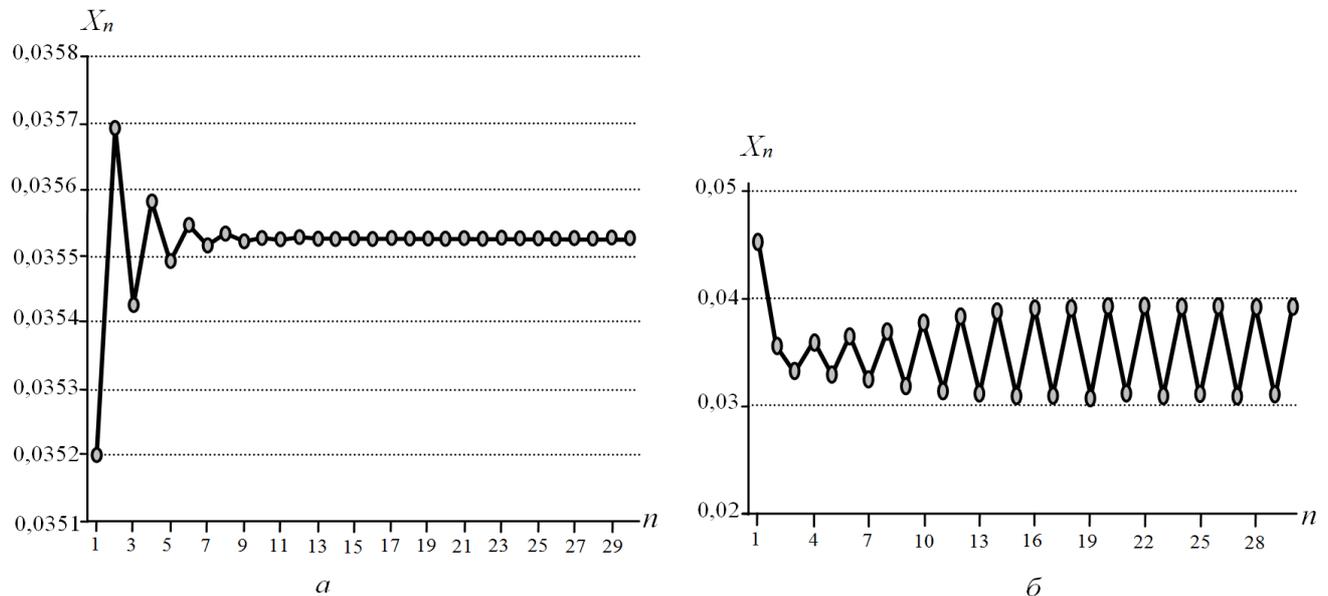


Рисунок 4

Зависимость X_{n+1} от n для аппроксимирующего полинома:
 a – соответствует 2010 г.; b – соответствует 1984 г.; $в$ – соответствует 1975 г.



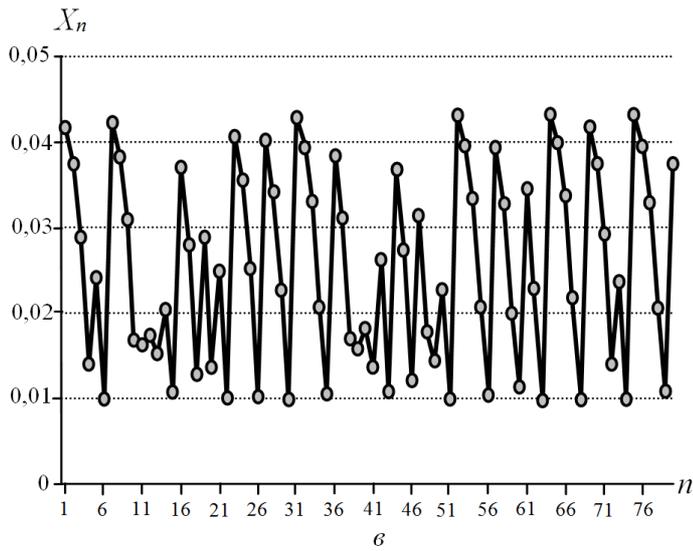


Рисунок 5

Реальная динамика темпов изменения мирового ВВП и теоретическая кривая, совмещенные с особыми точками аппроксимирующих полиномов, за 1962–2010 гг.

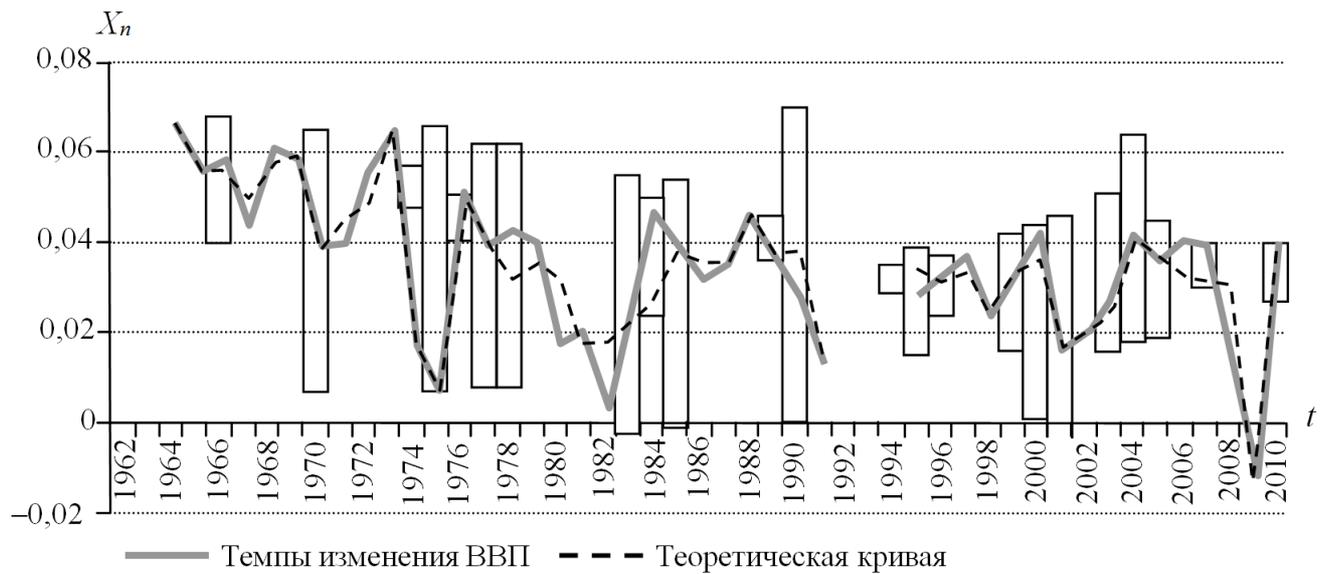
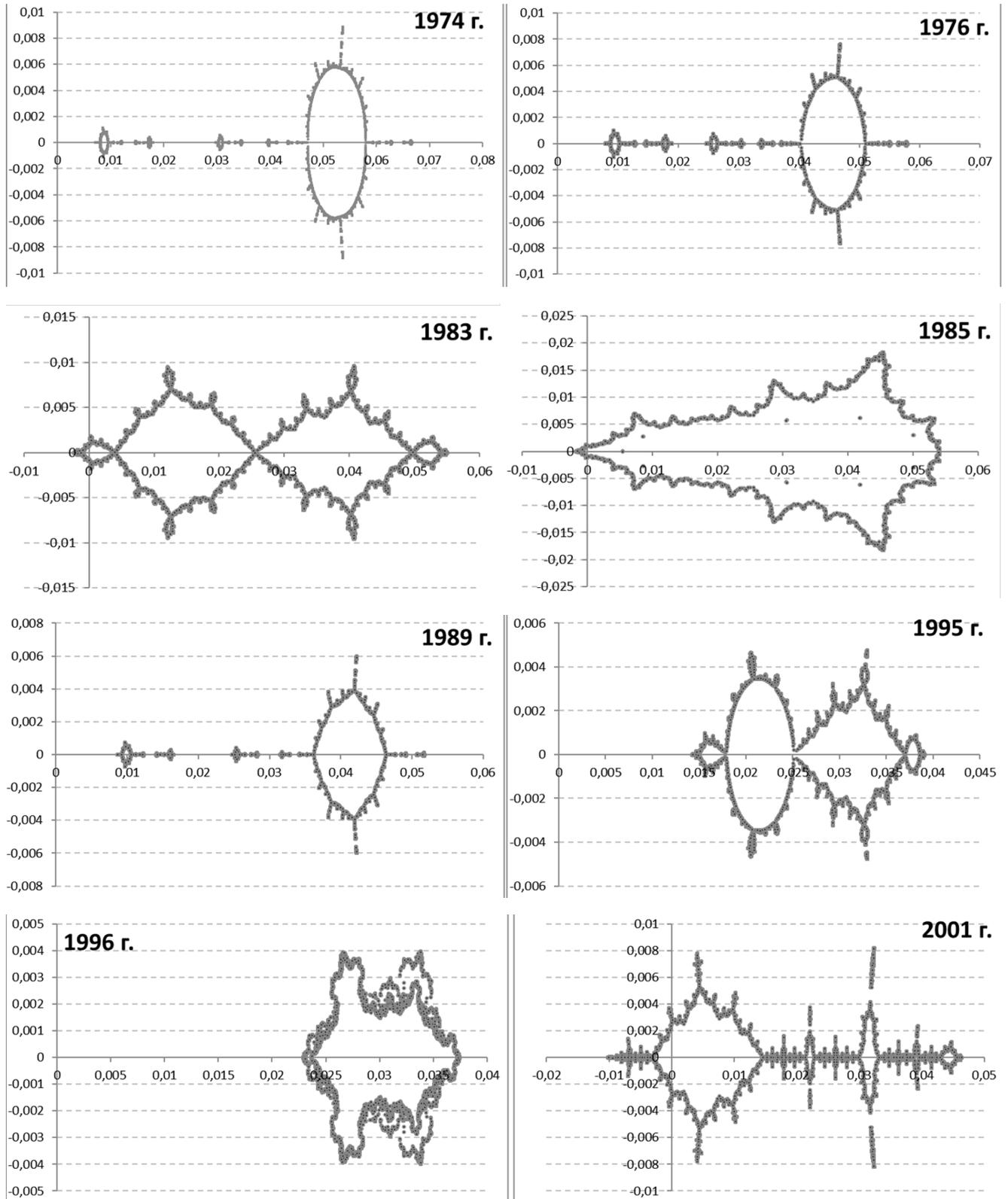


Рисунок 6

Комплексные области сходимости для X_n , отвечающие неподвижным устойчивым точкам аппроксимирующих полиномов



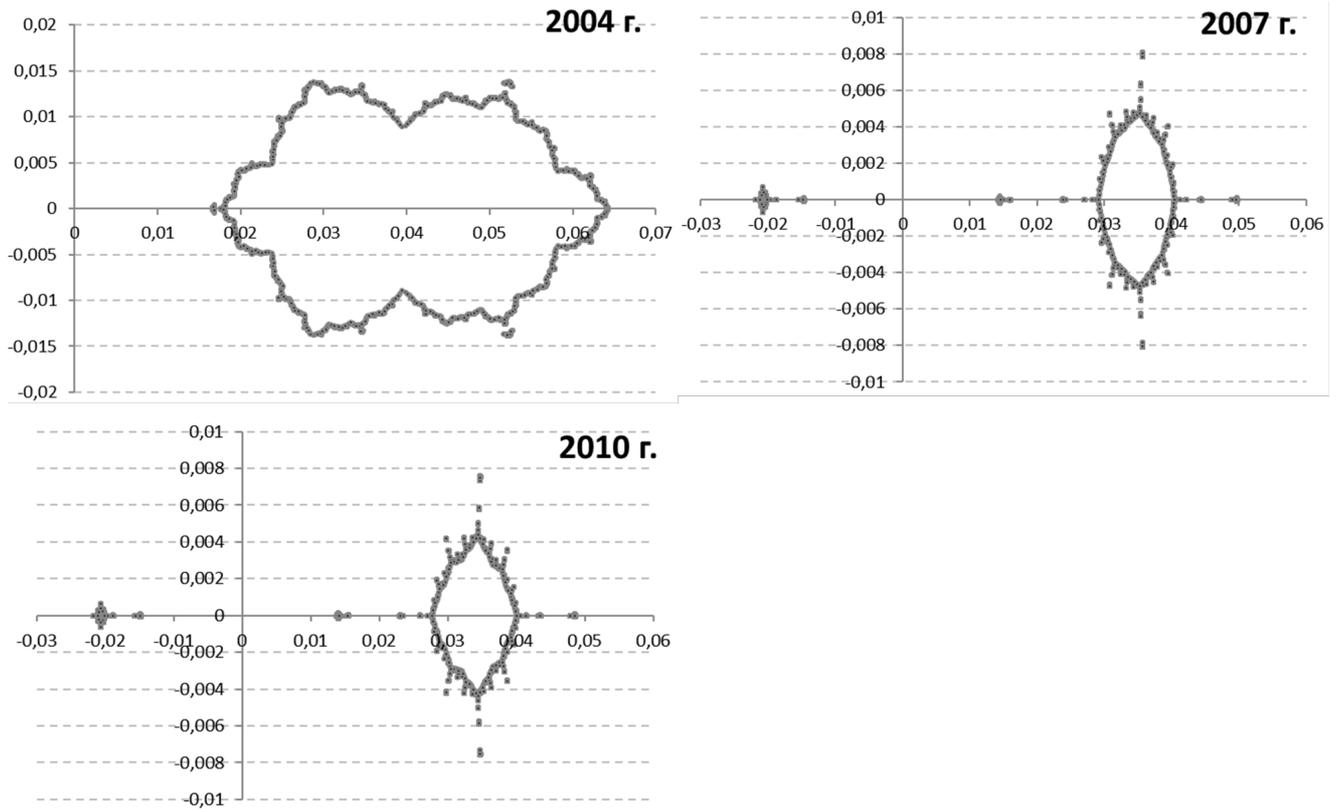
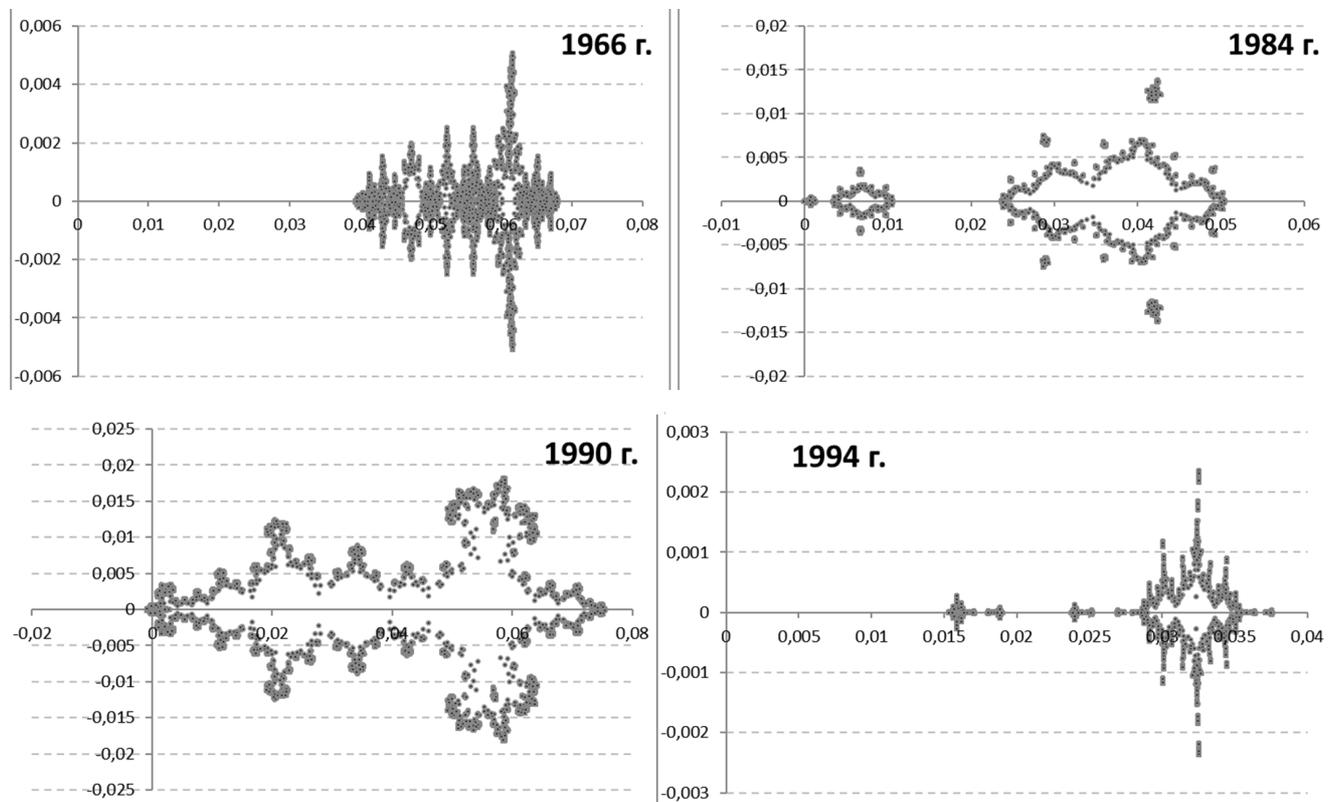


Рисунок 7

Комплексные области сходимости для X_n , отвечающие устойчивым циклам аппроксимирующих полиномов



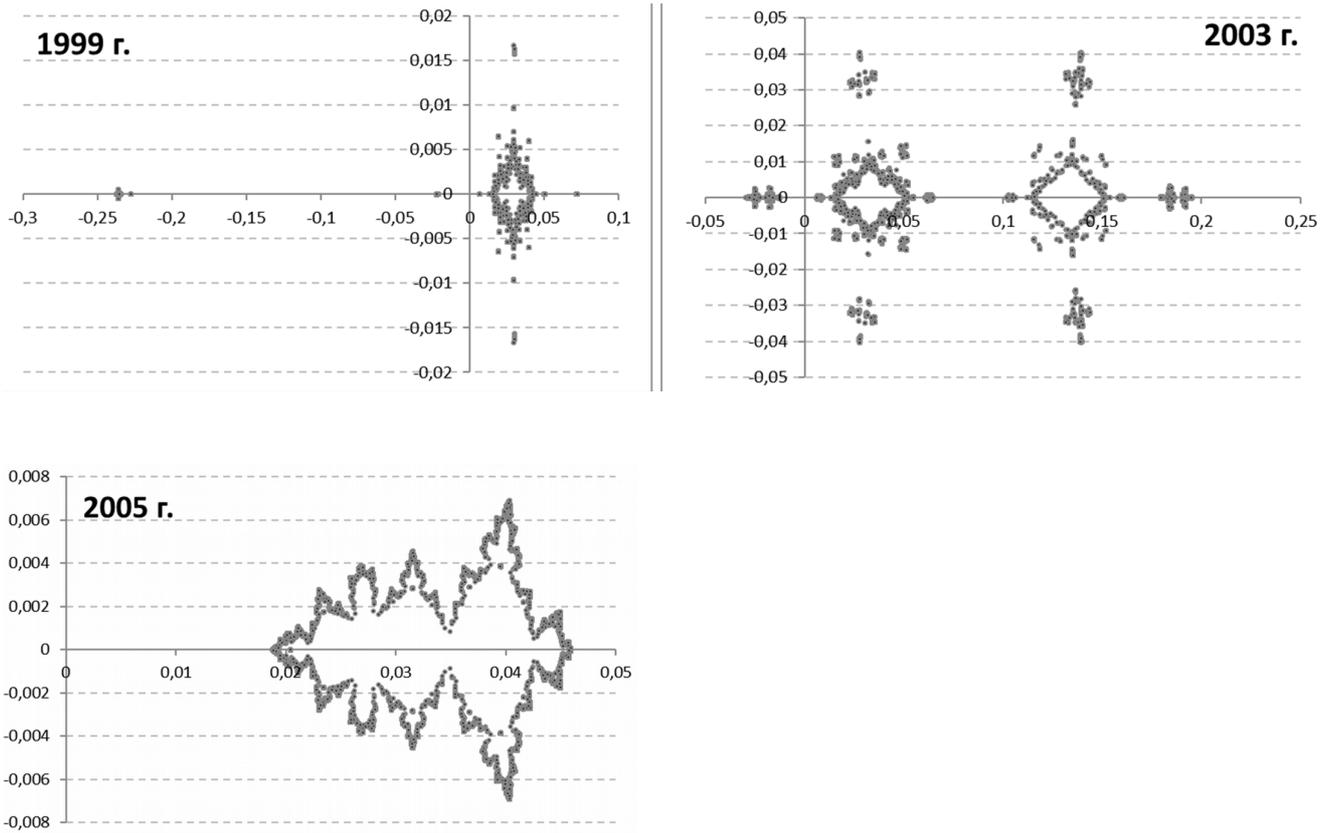
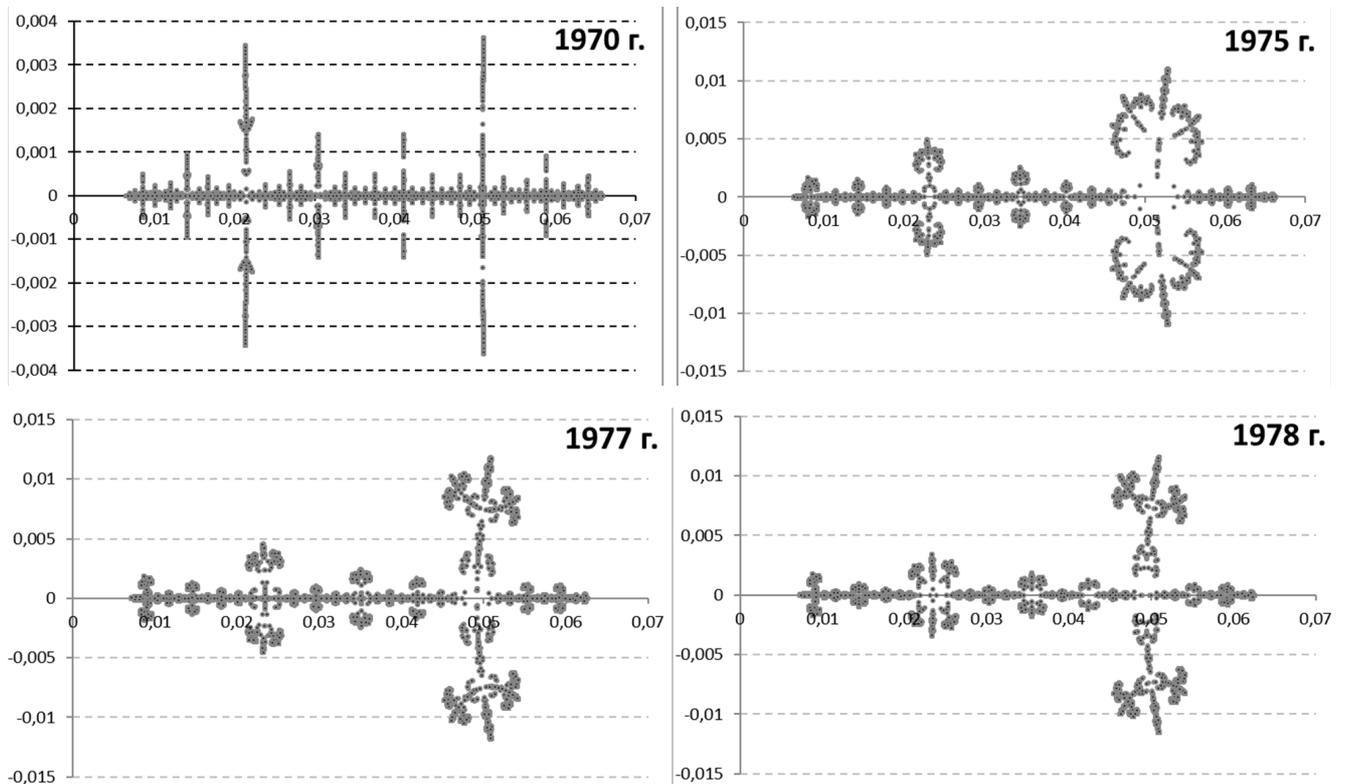


Рисунок 8

Комплексные области сходимости для X_n , отвечающие областям динамической устойчивости аппроксимирующего полинома



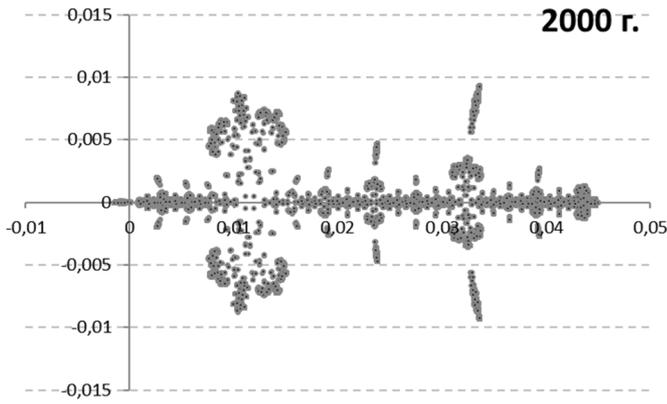
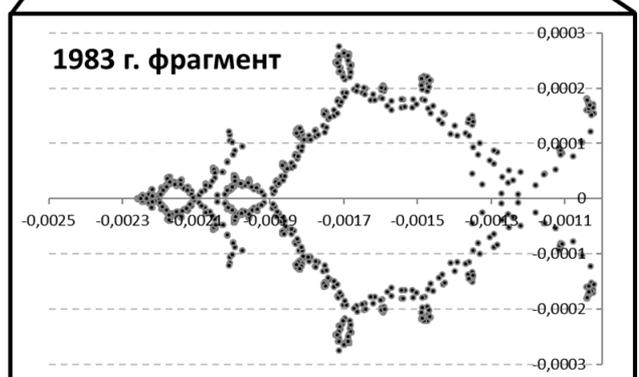
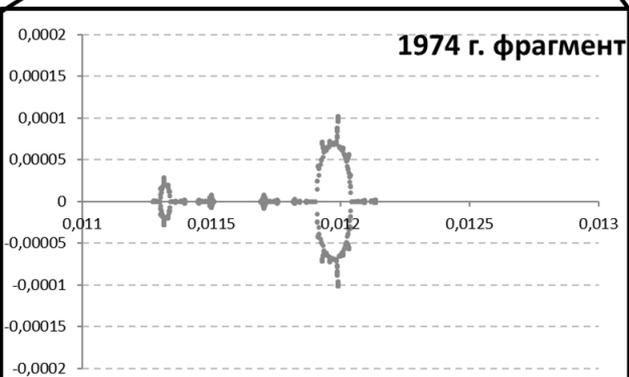
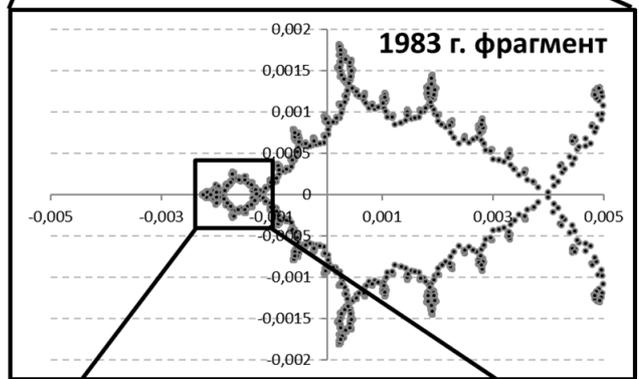
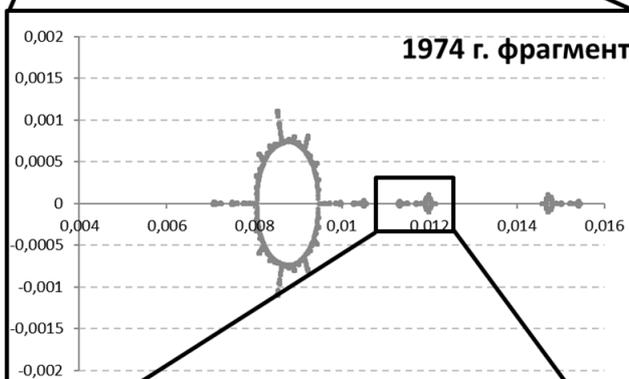
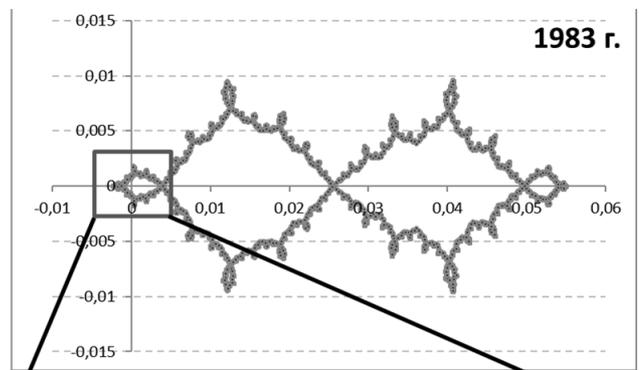
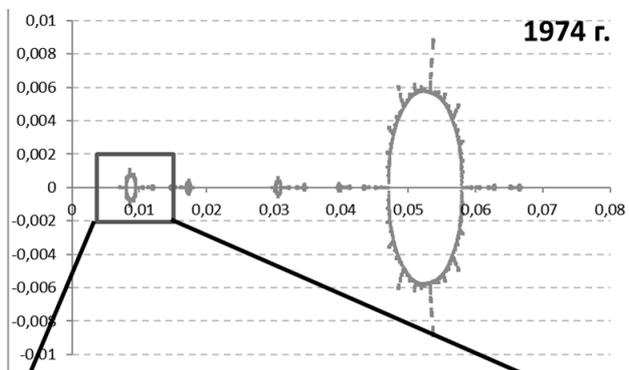


Рисунок 9

Наличие самоподобных структур в областях сходимости аппроксимирующих полиномов



Список литературы

1. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 544 с.
2. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Нелинейная динамика и хаос. Основные понятия. М.: КомКнига, 2009, 240 с.
3. *Хакен Г.* Синергетика. Принципы и основы. Перспективы и приложения. Ч. 1: Принципы и основы. Неравновесные фазовые переходы и самоорганизация в физике, химии и биологии / под ред. Ю.Л. Климонтовича и С.М. Осовца. М.: Ленанд, 2015. 448 с.
4. *Хакен Г.* Синергетика. Принципы и основы. Перспективы и приложения. Ч. 2: Принципы и основы. Иерархия устойчивости в самоорганизующихся системах и устройствах / под ред. Ю.Л. Климонтовича. М.: Ленанд, 2015. 432 с.
5. *Kitchin J.* Cycles and Trends in Economic Factors // *Review of Economics and Statistics*. 1923. Vol. 5. № 1. P. 10–16.
6. *Juglar C.* Des Crises commerciales et leur retour periodique en France, en Angleterre, et aux Etats-Unis. Guillaumin, Paris, 1862.
7. *Kuznets S.* Secular Movements in Production and Prices. Their Nature and their Bearing upon Cyclical Fluctuations. Houghton Mifflin, Boston, 1930.
8. *Кондратьев Н.Д.* Мировое хозяйство и его конъюнктуры во время и после войны. Вологда: Обл. отдел. Госиздата, 1922. С. 355.
9. *Кондратьев Н.Д.* Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. М.: Экономика, 2002. 767 с.
10. *Коротаев А.В., Цирель С.В.* Кондратьевские волны в мировой экономической динамике. Системный мониторинг. Глобальное и региональное развитие / под ред. Д.А. Халтуриной. М.: Либроком, 2009. С. 189–229.
11. *Kuznets S.* Secular Movements in Production and Prices. Their Nature and their Bearing upon Cyclical Fluctuations. Boston: Houghton Mifflin. 1930.
12. *Abramovitz M.* The Nature and Significance of Kuznets Cycles // *Economic Development and Cultural Change*. April. 1961. Vol. 9. № 3. P. 225–248.
13. *Шаниро А.П.* Математические модели конкуренции // *Управление и информация: сб. статей*. Владивосток: Дальневосточный научный центр АН СССР. 1974. Т. 10. С. 5–75.
14. *May R.M.* Biological populations obeying difference equations; stable points, stable cycles and chaos // *J. Theor. Biol.* 1975. Vol. 51. P. 511–524.
15. *Feigenbaum M.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19. № 1. P. 25–52.
16. *Collet P., Eckman J.P.* Iterated maps of the interval as dynamical system. Boston: Birkhauser, 1980. 249 p.
17. *Арнольд В.И., Аfreyмович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. 1985. Т. 5. С. 5–220.
18. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 304 с.
19. *Мароден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
20. *Korotayev A.V., Tsirel S.V.* A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis // *Structure and Dynamics*. 2010. Vol. 4. № 1. P. 3–57. URL: <http://escholarship.org/uc/item/9jv108xp>.
21. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Едиториал УРСС, 2007. 136 с.
22. *Секованов В.С.* Элементы теории фрактальных множеств. М.: Либроком, 2013. 248 с.
23. *Федер Е.* Фракталы / пер. с англ. 2-е изд. М.: Ленанд, 2014. 264 с.

DESCRIPTION OF CHANGES IN GLOBAL GDP WITHIN SHORT TIME INTERVALS USING A DISCRETE DYNAMIC MODEL

Anatolii A. KILYACHKOV^a, Larisa A. CHALDAEVA^{b,*}, Nikolai A. KILYACHKOV^c

^a Ernst&Young, Moscow, Russian Federation
AAKil@mail.ru

^b Financial University under Government of Russia, Moscow, Russian Federation
Chaldaeva45@mail.ru

^c Moscow State Institute of International Relations (University), Moscow, Russian Federation
NKil@hotmail.ru

* Corresponding author

Article history:

Received 1 October 2015
Accepted 21 October 2015

JEL classification: C02, E10,
E320

Keywords: stable fixed points,
stable cycles, dynamic stability
areas, areas of convergence, fractal
patterns

Abstract

Importance The global economy experiences periodic changes in GDP growth rates that regularly develop into economic crises. A model for describing this process should be of considerable scientific and practical interest.

Objectives The paper explores the dynamics of the model's bifurcation parameters within short intervals of time.

Methods The proposed dynamic model was devised using the information on growth rates of GDP as reported in the World Bank website. We applied the least squares method and a sliding approximation interval to determine coefficients of approximating polynomials. It is appropriate to use a five year interval for determining the coefficients of the approximating polynomial. The accuracy of statistical data approximation is assessed with a determination coefficient.

Results The proposed model describes trends in the world economy over short time intervals. As a result of this study, qualitative characteristics of the model were obtained, including convergence areas, stable fixed points, stable cycles and dynamic stability areas. Moreover, areas of convergence represent a fractal patterns.

Conclusions and Relevance As compared with statistical data, growth rates of global GDP coincide with convergence areas of the discrete dynamic model, indicating the importance of studying the qualitative characteristics of the model to describe global economic processes.

© Publishing house FINANCE and CREDIT, 2015

References

1. Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskii G.G., Samarskii A.A. *Nestatsionarnye struktury i diffuzionnyi khaos* [Non-stationary structures and diffusion chaos]. Moscow, Nauka Publ., 1992, 544 p.
2. Malinetskii G.G., Potapov A.B. *Nelineinaya dinamika i khaos. Osnovnye ponyatiya* [Nonlinear dynamics and chaos. Basic concepts]. Moscow, KomKniga Publ., 2009, 240 p.
3. Haken H. *Sinergetika. Printsipy i osnovy. Perspektivy i prilozheniya. Ch. 1. Printsipy i osnovy. Neravnovesnye fazovye perekhody i samoorganizatsiya v fizike, khimii i biologii* [Synergetik, eine Einführung: Nicht-Gleichgewichts-Phasenübergänge und Selbstorganisation in Physik, Chemie und Biologie]. Moscow, Lenand Publ., 2015, 448 p.
4. Haken H. *Sinergetika. Printsipy i osnovy. Perspektivy i prilozheniya. Ch. 2: Printsipy i osnovy. Ierarkhiya ustoichivosti v samoorganizuyushchikhsya sistemakh i ustroistvakh* [Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Self Organizing Systems and Devices]. Moscow, Lenand Publ., 2015, 432 p.
5. Kitchin J. Cycles and Trends in Economic Factors. *Review of Economics and Statistics*, 1923, vol. 5, no. 1, pp. 10–16.
6. Juglar C. Des Crises commerciales et leur retour periodique en France, en Angleterre, et aux Etats-Unis. Guillaumin, Paris, 1862.
7. Kuznets S. Secular Movements in Production and Prices. Their Nature and their Bearing upon Cyclical Fluctuations. Boston, Houghton Mifflin, 1930.

8. Kondrat'ev N.D. *Mirovoe khozyaistvo i ego kon'yunktury vo vremya i posle voiny* [The world economy and its condition during and after the war]. Vologda, Gosizdat Publ., 1922, p. 355.
9. Kondrat'ev N.D. *Bol'shie tsikly co'yunktury i teoriya predvideniya* [Major cycles of economic growth and the theory of foresight]. Moscow, Ekonomika Publ., 2002, 767 p.
10. Korotaev A.V., Tsirel' S.V. *Kondrat'evskie volny v mirovoi ekonomicheskoi dinamike. Sistemnyi monitoring. Global'noe i regional'noe razvitiye* [Kondratieff waves in global economic dynamics. System monitoring. Global and regional development]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2009, pp. 189–229.
11. Kuznets S. *Secular Movements in Production and Prices. Their Nature and their Bearing upon Cyclical Fluctuations*. Boston, Houghton Mifflin, 1930.
12. Abramovitz M. The Nature and Significance of Kuznets Cycles. *Economic Development and Cultural Change*, 1961, vol. 9, no. 3, pp. 225–248.
13. Shapiro A.P. *Matematicheskie modeli konkurentsii. V kn.: Upravlenie i informatsiya* [Mathematical models of competition. In: Management and information]. Vladivostok, Far Eastern Scientific Center of Academy of Sciences of USSR Publ., 1974, vol. 10, pp. 5–75.
14. May R.M. Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos. *Journal of Theoretical Biology*, 1975, vol. 51, iss. 2, pp. 511–524.
15. Feigenbaum M. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics*, 1978, vol. 19, no. 1, pp. 25–52.
16. Collet P., Eckman J.P. *Iterated Maps of the Interval as Dynamical System*. Boston, Birkhauser, 1980, 249 p.
17. Arnol'd V.I., Afreimovich V.S., Il'yashenko Yu.S., Shil'nikov L.P. *Teoriya bifurkatsii* [Bifurcation theory]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya = Results of Science and Technology. Contemporary Issues of Mathematics. Fundamental Areas*, 1985, vol. 5, pp. 5–220.
18. Iooss G., Joseph D. *Elementarnaya teoriya ustoichivosti i bifurkatsii* [Elementary Stability and Bifurcation Theory]. Moscow, Mir Publ., 1983, 304 p.
19. Marsden J.E., McCracken M. *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya* [The Hopf Bifurcation and Its Applications]. Moscow, Mir Publ., 1980, 368 p.
20. Korotayev A.V., Tsirel S.V. A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis. *Structure and Dynamics*, 2010, vol. 4, no. 1, pp. 3–57. Available at: <http://escholarship.org/uc/item/9jv108xp>.
21. Arnol'd V.I. *Teoriya katastrof* [The catastrophe theory]. Moscow, URSS Publ., 2007, 136 p.
22. Sekovanov V.S. *Elementy teorii fraktal'nykh mnozhestv* [Elements of the theory of fractal sets]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2013, 248 p.
23. Feder J. *Fraktaly* [Fractals]. Moscow, Lenand Publ., 2014, 264 p.