

ИЗЛИШЕК ПОТРЕБИТЕЛЯ В ЯЩИКЕ ЭДЖУОРТА: КВАЗИЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ И ОБЩИЙ СЛУЧАЙ*

Сергей Александрович МОСКАЛЬОНОВ

кандидат экономических наук, доцент кафедры экономической теории,
Ульяновский государственный университет (УлГУ),
Ульяновск, Российская Федерация
moskalionov@yahoo.com
<http://orcid.org/0000-0002-8681-2338>
SPIN-код: 3599-2745

История статьи:

Рег. № 498/2022
Получена 31.10.2022
Получена в
доработанном виде
11.11.2022
Одобрена 30.11.2022
Доступна онлайн
30.01.2023

УДК 330.42
JEL: D11, D61

Ключевые слова:

излишек потребителя,
ящик Эджуорта,
независимость от
траектории, функция
полезности

Аннотация

Предмет. Концепция излишка потребителя находится в центре современной микроэкономической теории вводного и промежуточного уровней. Индивидуальный излишек потребителя показывает изменение функции полезности потребителя в денежном выражении вдоль специфических траекторий. В статье рассматриваются слабо кардиналистские свойства обобщенного индивидуального излишка потребителя на примере простой экономики обмена – ящика Эджуорта.

Цели. Нахождение новых слабо кардиналистских свойств индивидуального излишка потребителя в ящике Эджуорта в квазилинейном и в общем случаях.

Методология. Использовались методы логического и математического анализа. Теория обобщенного излишка потребителя исследовалась с использованием математической теории криволинейных интегралов второго рода.

Результаты. Индивидуальный излишек порождает функцию полезности в денежном выражении с единичной предельной полезностью товара-измерителя в ящике Эджуорта. Дано определение независимости от траектории индивидуального излишка. Доказана теорема о том, что независимый от траектории излишек потребителя эквивалентен наличию квазилинейных предпочтений потребителя в простой экономике обмена. Представлена характеристика общего случая для излишка потребителя в ящике Эджуорта и дана таксономия траекторий в ящике Эджуорта.

Выводы. Обобщенный индивидуальный излишек потребителя порождает функцию полезности в денежном выражении вдоль монотонных (слабо монотонных) траекторий в ящике Эджуорта. Если потребитель является покупателем первого товара, то снова показано, что излишек потребителя представляется как область между функцией резервной цены и линией (кривой) реаллокации.

© Издательский дом ФИНАНСЫ и КРЕДИТ, 2022

* Исследование осуществлялось при поддержке грантов Консорциума экономических исследований и образования, проекты № R03-1421, R04-0251.

Автор глубоко признателен профессору Ричарду Эриксону, академику, доктору экономических наук В.М. ПОЛТЕРОВИЧУ, доктору экономических наук С.В. АРЖЕНОВСКОМУ, доктору физико-математических наук А.В. САВВАТЕЕВУ, доктору физико-математических наук В.К. ГОРБУНОВУ, кандидату физико-математических наук К.И. СОНИНУ, кандидату физико-математических наук А.Е. ЭТКИНУ, кандидату экономических наук С.Г. КАРАКОЗОВУ, профессору С.Ю. КОВАЛЕВУ, профессору Джиандонгу Джу за ценные замечания и рекомендации.

Для цитирования: Москальонов С.А. Излишек потребителя в ящике Эджуорта: квазилинейный случай и общий случай // *Экономический анализ: теория и практика*. – 2023. – Т. 22, № 1. – С. 152 – 171.
<https://doi.org/10.24891/ea.22.1.152>

Концепция излишка потребителя находится в центре современного курса микроэкономической теории. Излишек потребителя нашел широкое применение как наглядное представление изменения индивидуального благосостояния практически во всех разделах вводного и промежуточного (а также продвинутого) уровней микроэкономического анализа.

Широко известно, что концепция излишка потребителя была введена в классической работе Жюля Дюпюи [1], в которой он утверждал, что совокупная польза от товара или услуги превышает денежные расходы на производство и предоставление этого товара. Очень подробный обзор литературы по проблеме излишка потребителя был дан в нашей статье [2], поэтому перечислим здесь лишь основные результаты исследований, сформировавших базис для современного понимания этого вопроса.

Одним из первых подверг строгой критике концепцию излишка потребителя Альфред Маршалл [3], который утверждал, что теория излишка работает лишь в случае единичной предельной полезности денег. Жесткая критика в адрес концепции излишка потребителя последовала от Нобелевских лауреатов по экономике. Например, Пол Самуэльсон [4] показал, что предельная полезность денег никогда не может быть постоянной при отсутствии каких-либо ограничений на цены и бюджет потребителя. Он даже назвал излишек потребителя Дюпюи «бесполезной теоретической игрушкой». Джон Ричард Хикс [5, 6] отверг полностью концепцию излишка потребителя Дюпюи. Современные учебники по микроэкономике промежуточного и продвинутого уровней представляют как раз изложение этой, уже частично устаревшей, концепции Хикса, восходящей к теории «четырех излишков» – эквивалентной, компенсирующей вариации, эквивалентного и компенсирующего излишков как интегралов от компенсированной (Хиксианской) функции спроса. Цель нашего цикла статей по теории индивидуального и общественного излишка состоит в том, чтобы опровергнуть и одновременно обобщить эту теорию Д. Хикса.

В классических работах Д. Чипмана и Д. Мура [7, 8] представлены условия независимости от траектории индивидуального излишка потребителя. Для того, чтобы быть представлением полезности, излишек должен быть независим от траектории, как они аргументируют. Однако это возможно лишь в том случае, если предпочтения потребителя нереалистичны, а именно – либо гомотетичны, либо квазилинейны. Фактически это означает невозможность приложения теории излишка потребителя к реальному поведению реальных потребителей. В данной статье сделана попытка обобщить теорию Д. Чипмана и Д. Мура для случая простой

экономики обмена. Результаты теории Д. Чипмана и Д. Мура были воспроизведены для случая совокупного (социального) излишка потребителя в известных работах А. Сливински [9] и Ч. Блэкорби и Д. Доналдсона [10].

В наших работах [2, 11] отрицается подобная критика в адрес теории излишка потребителя, одновременно опровергаются и обобщаются теории Д.Р. Хикса, Д. Чипмана и Д. Мура. Мы считаем, что теория излишка потребителя может (и должна) работать в случае зависимого в общем случае от траектории интеграла излишка. Следует отметить, что в литературе уже рассматривалась эта ситуация, например в работах Е. Силберберга [12]. Вводя вместо ограничения на пространство допустимых предпочтений ограничение на пространство допустимых траекторий, мы фактически развиваем идеи, заложенные в работах М. Бернса [13], Е. Зайака [14] и Д. Штала [15]. В данной статье мы применяем и прилагаем основы теории излишка потребителя к простой экономике обмена – ящику Эджуорта, продолжая исследование, начатое в работе [11]. В ней мы корректно определили индивидуальный излишек потребителя с помощью математической теории криволинейных интегралов второго рода. Также было введено понятие допустимой траектории и предельного индивидуального излишка потребителя. Было показано, что излишек потребителя является корректной мерой индивидуального благосостояния в ящике Эджуорта, а также что излишек потребителя равен нулю вдоль любой кривой безразличия. Рассмотрен численный пример расчета и представления индивидуального излишка потребителя в ящике Эджуорта. Главный вывод заключается в том, что обобщенный индивидуальный излишек потребителя является корректной мерой изменения полезности потребителя вдоль монотонных (слабо монотонных) траекторий в ящике Эджуорта. Геометрически излишек потребителя представлен как площадь, ограниченная сверху кривой резервной цены и снизу линией (кривой) реаллокации. Перейдем теперь к рассмотрению теории независимого от траектории индивидуального излишка в простой экономике обмена.

Рассмотрим модель простой экономики обмена – ящика Эджуорта. Будем считать, что в экономике $H = 2$ потребителя, пронумерованных $h = 1, 2$ и $N = 2$ потребительских товара, пронумерованных $i = 1, 2$. Зададим вектор совокупных запасов товаров в форме $\bar{\omega}(t) \in \bar{\Omega} \equiv \mathbb{R}_+^2$, где $\bar{\Omega}$ есть множество всех (неотрицательных) векторов совокупных запасов. Вектор валового спроса или потребления агента h в точке или состоянии t задан как $c^h(t)$, распределение товаров – вектор $c(t) = (c^1(t), c^2(t)) \in \mathbb{R}_+^4$. Распределение товаров (аллокация) c считается допустимым, если $\sum_{h=1}^2 c_i^h = \bar{\omega}_i$ для каждого i .

Вектор резервных цен потребителей обозначается $p(t) = ((p_1^1, p_2^1); (p_1^2, p_2^2)) > 0$. Коэффициент реаллокации (перераспределения), обобщенный излишек потребителя

для агента h , предельный излишек потребителя, понятия траектории, монотонной и слабо монотонной траектории строго определены в работе [11].

Предложение 1. В ящике Эджуорта индивидуальный обобщенный излишек потребителя порождает бесконечное число функций полезности с единичной предельной полезностью товара-измерителя (или квазилинейных функций полезности типа $\tilde{u}^h(c^h) = \tilde{v}^h(c_1^h) + c_2^h$) исключительно вдоль любой заданной (слабо) монотонной траектории для этого потребителя.

Доказательство: см. подобное утверждение в работе Е. Зайака [14], где он предложил существование уникального монотонного преобразования функции полезности с единичной предельной полезностью дохода для потребителя с постоянным доходом вдоль заданной монотонной траектории (в рамках частичного равновесия). Мы предлагаем более компактное и простое доказательство существования множества функций полезности с единичной предельной полезностью измерителя для траектории в ящике Эджуорта.

Рассмотрим некоторую (слабо) монотонную траекторию $\Psi(c(0), c(1))$. Введем расширение этой траектории до (слабо) монотонной траектории $\tilde{\Psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$ с $\tilde{t} < 0, \hat{t} > 1$ (фактически мы можем переопределить t так, что эта общая траектория может начинаться с $\tilde{t} = 0$). Эта новая траектория начинается на самой низкой кривой безразличия для первого потребителя в ящике Эджуорта (например, в начале координат – нижнем левом угле) с некоторого $\tilde{t}$ и заканчивается на самой высокой кривой безразличия в ящике Эджуорта (скажем, в верхнем правом углу) на некотором $\hat{t}$. Такое расширение первоначальной (слабо) монотонной траектории всегда возможно. Например, мы можем соединить $c(0)$ и начало координат – нижний левый угол – линейным сегментом, то же самое можно сделать, соединив $c(1)$ и верхний правый угол ящика Эджуорта. Или мы можем соединить начала координат и эти состояния нелинейными гладкими сегментами. Во всех этих случаях новая траектория $\tilde{\Psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$ будет (кусочно) монотонной, так как наши расширяющие сегменты пересекают каждую кривую безразличия только один раз. Это означает, что новая траектория $\tilde{\Psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$ представляет собой объединение трех траекторий: первоначальной траектории $\Psi(c(0), c(1))$ и двух сегментов, первый начинается с самой низкой кривой безразличия и идет до состояния $c(0)$ и другой сегмент соединяет распределение $c(1)$ и точку начала координат на самой высокой кривой безразличия (рис. 1).

Далее припишем произвольное (положительное) число $\tilde{u}^h(c(0))$ начальной аллокации $c(0)$ и построим новую функцию полезности для каждой аллокации $\hat{c}$, которая лежит на пути $\tilde{\Psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$:

$$\tilde{u}^h(\hat{c}) := \tilde{u}^h(c(0)) + CS^h(\tilde{\psi}(c(0), \hat{c})) = \tilde{u}^h(c(0)) + \int_{\hat{c}_1^h(0)}^{\hat{c}_1^h} \tilde{p}_1^h(c_1^h) dc_1^h + \hat{c}_2^h - c_2^h(0). \quad (1)$$

Здесь $\tilde{p}_1^h(c_1^h)$ – функция резервной цены, определенная как в процедуре ранее: резервная цена выражена через потребление первого товара вдоль траектории. Выражение (1) является функцией от $\hat{c}$ по траектории $\tilde{\psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$, интеграл в (1) является интегралом с переменным верхним пределом, и по новой траектории является функцией только от $\hat{c}_1^h$. Поскольку траектория $\tilde{\psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$ является (слабо) монотонной по построению, она пересекает каждую кривую безразличия только один раз, кроме тех сегментов, где она совпадает с некоторым сегментом кривой безразличия. На *рис. 1* это может быть отрезок между $c(0)$ и $c(1)$. Так как излишек потребителя вдоль любой кривой безразличия равен нулю, функция $\tilde{u}^h(\hat{c})$ приписывает единственное определенное число каждой кривой безразличия потребителя h , и поскольку траектория (слабо) монотонна, это число больше на той кривой безразличия, которая расположена выше, или дальше от начала координат для (у нас первого) потребителя. Все это следует из предложений, сформулированных в работе [11]. Тогда мы можем приписать каждому распределению на данной кривой безразличия то же самое число, которое дано этой функцией $\tilde{u}^h(\hat{c})$. В результате, мы построили функцию $\tilde{u}^h(c)$ для каждого распределения c в ящике Эджуорта, которая является монотонным преобразованием первоначальной функции полезности $u^h(c)$ и также является функцией полезности для того же самого потребителя h .

Взяв производную по второму товару-измерителю, мы имеем:

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}^h(\hat{c}^h)}{\partial \hat{c}_2^h} \right|_{\text{вдоль пути } \tilde{\psi}(c)} = 1.$$

Таким образом, вдоль траектории $\tilde{\psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$ предельная полезность товара-измерителя равна единице. Чтобы проверить результат, возьмем производную (1) по первому товару. Используя правила дифференцирования интегралов с переменным верхним пределом, получаем:

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}^h(\hat{c})}{\partial \hat{c}_1^h} \right|_{\text{вдоль пути } \tilde{\psi}(c)} = \frac{d}{d\hat{c}_1^h} \left[\int_{\hat{c}_1^h(0)}^{\hat{c}_1^h} \tilde{p}_1^h(c_1^h) dc_1^h \right] = \tilde{p}_1^h(\hat{c}_1^h).$$

Мы получили непротиворечивый и корректный результат: предельная полезность товара-измерителя есть множитель Лагранжа для потребителя h ; предельная полезность первого товара является произведением множителя Лагранжа и цены

первого товара, так что единичная предельная полезность товара-измерителя предполагает, что резервная цена первого товара равна предельной полезности первого товара в единицах товара-измерителя. Обратите внимание, что этот результат действителен только вдоль заданной (слабо) монотонной траектории $\tilde{\Psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$. Если перейти на другую (слабо) монотонную траекторию $\tilde{\Psi}$, то мы можем снова создать функцию полезности $\tilde{u}^h(c)$ вдоль старой траектории $\tilde{\Psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$.

Изменяя число $\tilde{u}^h(c(0))$ в начальной точке траектории $\Psi(c(0), c(1))$, мы получим другую функцию полезности $\hat{u}^h(c) := \tilde{u}^h(c) + a$, где a равно разнице между старым и новым значением числа $\Psi(c(0), c(1))$. Если по траектории $\tilde{\Psi}(c(\tilde{t}), c(\hat{t}))$ предельная полезность товара-измерителя равна единице, то же самое будет для новой функции $\tilde{u}^h(c)$:

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}^h(\hat{c}^h)}{\partial \hat{c}_2^h} \right|_{\text{вдоль пути } \tilde{\Psi}(c)} = \left. \frac{\partial \hat{u}^h(\hat{c}^h)}{\partial \hat{c}_2^h} \right|_{\text{вдоль пути } \tilde{\Psi}(c)} + \left. \frac{\partial a}{\partial \hat{c}_2^h} \right|_{\text{вдоль пути } \tilde{\Psi}(c)} = 1.$$

Так как существует бесконечное множество возможных чисел $\Psi(c(0), c(1))$, то, соответственно, существует бесконечное число допустимых функций $\hat{u}^h(c)$, каждая из которых имеет единичную предельную полезность товара-измерителя вдоль соответствующей траектории. Кроме того, из (1) следует, что изменение каждой из этих функций $\hat{u}^h(c)$ по траектории в точности равно Маршаллианскому излишку, определенному ранее. Q.E.D.

Наше предложение позволяет сравнить теорию излишка потребителя с классической интерпретацией понятия излишка потребителя, которое было дано Ж. Дюпюи и А. Маршаллом наряду с другими экономистами. Вдоль любой (слабо) монотонной траектории график функции резервной цены может интерпретироваться как график предельной полезности для специфической функции полезности $\tilde{u}^h(\hat{c})$ из множества всех возможных функций полезности, представляющих предпочтения потребителя. Это объясняет нашу интерпретацию функции резервной цены как обратной обобщенной функции спроса. Для любого строго монотонного и строго выпуклого предпочтения (не только квазилинейного и не только типа Кобба – Дугласа), если потребитель является покупателем первого товара, излишек потребителя как область (площадь) между функцией резервной цены и кривой или линией реаллокации вдоль монотонной траектории может интерпретироваться как разность между совокупным выигрышем в полезности потребителя от покупки первого товара в единицах товара-измерителя и общими затратами на эту покупку в единицах товара-измерителя. Таким образом, излишек потребителя есть чистый выигрыш (потеря) в полезности в единицах товара-измерителя. Предельный излишек по траектории может интерпретироваться как разность между предельной

полезностью товара в единицах товара-измерителя и стоимостью получения дополнительной единицы товара, измеренной в товаре-измерителе. Однако эту интерпретацию можно дать только для специфической функции полезности, определенной как в предложении 1, или для любой функции $\hat{u}^h(c)$. Для любой другой нетривиальной возрастающей трансформации этой функции полезности мы должны использовать первую интерпретацию излишка потребителя: как разность между резервной ценой потребителя и фактическим коэффициентом реаллокации.

Обратим внимание, что наша интерпретация в этом предложении 1 слабо кардиналистская. Она напоминает количественную интерпретацию экономической теории XIX в. или вводных учебников экономики, но мы все же называем ее слабо кардиналистской теорией. В кардиналистской интерпретации XIX в. предполагалось существование только одной, уникальной функции полезности, и излишек потребителя был всегда равен по любой допустимой траектории изменению этой единственной функции полезности с единичной предельной полезностью товара-измерителя. Это подразумевает, что индивидуальный излишек независим от траектории и что предпочтения потребителей являются квазилинейными относительно товара-измерителя на любой допустимой траектории (см. теорему 1 далее). В нашей слабо кардиналистской теории любая возрастающая трансформация функций полезности потребителей приводит к одинаково допустимым функциям полезности; таким образом, существует бесконечное множество возможных функций полезности, представляющих исходные предпочтения. Но только для «очень малого» подмножества этого бесконечного множества допустимых функций полезности – для подмножества функций $\hat{u}^h(c)$, определенных ранее, можно сказать, что кривая резервной цены показывает предельную полезность первого товара; для функций, которые не являются функциями типа $\hat{u}^h(c)$, мы в общем случае не можем сформулировать такое сильное утверждение.

Если потребитель является чистым продавцом первого товара, то мы можем переписать уравнение излишка потребителя, имея в виду, что $c_1^h(1) < c_1^h(0)$:

$$\begin{aligned} CS^h(0,1) &= \int_{c_1^h(0)}^{c_1^h(1)} \left(\tilde{p}_1^h(c_1^h) - \tilde{r}_1^h(c_1^h) \right) dc_1^h = - \int_{c_1^h(1)}^{c_1^h(0)} \left(\tilde{p}_1^h(c_1^h) - \tilde{r}_1^h(c_1^h) \right) dc_1^h = \\ &= \int_{c_1^h(1)}^{c_1^h(0)} \left(\tilde{r}_1^h(c_1^h) - \tilde{p}_1^h(c_1^h) \right) dc_1^h. \end{aligned} \quad (2)$$

Если потребитель продает первый товар, то он покупает второй товар. Преобразовывая, мы имеем в этом случае:

$$p_1^h(t) < - \frac{\frac{\partial c_2^h(t)}{\partial t}}{\frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t}} = \frac{\partial c_2^h(c_1^h)}{\partial c_1^h} \bigg|_{\text{вдоль траектории}} = r_1^h(t). \quad (3)$$

Уравнение (3) показывает, что потребитель продает дополнительную единицу первого товара вдоль монотонной траектории, только если его резервная цена или предельная полезность в единицах товара-измерителя (см. предложение ранее), ниже, чем коэффициент реаллокации этого товара в единицах товара-измерителя: если потребителю выгодно продать первый товар (в единицах товара-измерителя). Из тождества $c_1^1 + c_1^2 = \bar{c}_1$ получаем для данного ящика Эджуорта:

$$\frac{\partial \tilde{c}_1^1(c_1^2)}{\partial c_1^2} = -1. \quad (4)$$

Предположим, что первый потребитель – чистый продавец первого товара, а второй потребитель – чистый покупатель первого товара. Теперь, используя ту же процедуру, которая использована для покупателя первого товара, выразим потребление первого товара первым потребителем через потребление первого товара вторым потребителем вдоль данной монотонной траектории, и получим функцию $\tilde{c}_1^1(c_1^2)$. Используя (2) и эту функцию, переписываем (2) для первого потребителя следующим образом:

$$\begin{aligned} CS^1(0,1) &= \int_{c_1^1(1)}^{c_1^1(0)} \left(\tilde{r}_1^1(c_1^1) - \tilde{p}_1^1(c_1^1) \right) dc_1^1 = \int_{c_1^1(c_1^2(1))}^{c_1^1(c_1^2(0))} \left(\tilde{r}_1^1(\tilde{c}_1^1(c_1^2)) - \tilde{p}_1^1(\tilde{c}_1^1(c_1^2)) \right) d\tilde{c}_1^1(c_1^2) = \\ &= \int_1^0 \left(\tilde{r}_1^1(\tilde{c}_1^1(c_1^2(t))) - \tilde{p}_1^1(\tilde{c}_1^1(c_1^2(t))) \right) \frac{\partial \tilde{c}_1^1(c_1^2)}{\partial c_1^2} \frac{\partial c_1^2(t)}{\partial t} dt = \\ &= \int_0^1 \left(\tilde{r}_1^1(\tilde{c}_1^1(c_1^2(t))) - \tilde{p}_1^1(\tilde{c}_1^1(c_1^2(t))) \right) \frac{\partial c_1^2(t)}{\partial t} dt = \int_{c_1^2(0)}^{c_1^2(1)} \left(\tilde{r}_1^1(\tilde{c}_1^1(c_1^2)) - \tilde{p}_1^1(\tilde{c}_1^1(c_1^2)) \right) dc_1^2. \quad (5) \end{aligned}$$

Геометрически (5) показывает, что излишек продавца (здесь это первый потребитель) может быть представлен как область (площадь) между линией или кривой (коэффициента) реаллокациями (или меновой стоимости) для первого потребителя и линией или кривой резервной цены для первого потребителя на графике потребления первого товара вторым потребителем. В нашем случае здесь и резервная цена и коэффициент реаллокации являются функциями от потребления первого товара вторым агентом c_1^2 . Функция резервной цены продавца (первого потребителя) одновременно является обратной обобщенной функцией валового спроса. Излишек продавца (геометрически напоминает излишек производителя в

модели частичного равновесия учебника по микроэкономике) и показывает чистый выигрыш от продажи первого товара второму потребителю, предельный излишек продавца показывает чистый выигрыш от продажи дополнительной или предельной единицы первого товара: это разность между предельным выловым выигрышем (предельной полезностью) от продажи предельной единицы первого товара в терминах товар-измерителя и предельными затратами (альтернативными издержками) дополнительной единицы первого товара в единицах товара-измерителя.

Квазилинейный пример. Может ли индивидуальный излишек потребителя быть точной количественной мерой полезности по любой траектории, соединяющей два состояния, скажем, вдоль произвольной немонотонной траектории? Ответ: в общем случае – нет. Если излишек потребителя будет критерием полезности вдоль любой траектории, то он также должен быть мерой полезности вдоль замкнутой траектории; но в этом случае излишек должен быть нулевым: полезность не может измениться, если мы возвращаемся в состояние $s(0)$ из того же самого состояния $s(0)$. Но излишек потребителя по любой замкнутой траектории может быть нулевым только если предпочтения потребителя квазилинейны относительно товара-измерителя; это было доказано в модели частичного равновесия в работе Д. Чипмана и Д. Мура.

Предпочтения потребителя h квазилинейны относительно товара-измерителя, если они могут быть представлены функцией полезности вида $u^h = \hat{u}^h(c_1^h) + c_2^h$ (линейной относительно второго товара и в общем случае нелинейной относительно первого товара). Чипман и Мур называли эти предпочтения параллельными, потому что кривые безразличия в этом случае – параллельно смещенные (относительно оси измерителя) кривые. Это хороший теоретический (но, конечно, не реалистичный, поскольку спрос на первый товар в квазилинейном случае не зависит от совокупного дохода после некоторого начального порога) пример, для которого излишек потребителя может быть легко рассчитан. Итак, предположим, что предпочтения потребителей описываются квазилинейными функциями полезности.

Определение. Общественный излишек CS (соответственно, излишек потребителя h CS^h) не зависит от траектории, если для любых двух разных траекторий, соединяющих любые два социальных состояния: $\psi^1(s, s') \in \psi(s, s')$, $\psi^2(s, s') \in \psi(s, s')$ $\psi^1 \neq \psi^2$, мы имеем: $CS(\psi^1(s, s')) = CS(\psi^2(s, s'))$. Соответственно, $CS^h(\psi^1(s, s')) = CS^h(\psi^2(s, s'))$.

Следующая теорема устанавливает условия независимости от траектории индивидуального излишка потребителя, если цена товара-измерителя равна единице.

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) интеграл (излишек потребителя) вдоль любой замкнутой непрерывной гладкой траектории $\Psi(t)$ равен нулю (цена второго товара равна единице):

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Psi(c,c)} p_i^h(c^h(t)) dc_i^h = 0;$$

- 2) обобщенный излишек потребителя не зависит от траектории;

- 3) вдоль каждой траектории обобщенный излишек потребителя равен изменению потенциальной функции, являющейся квазилинейной функцией полезности потребителя h :

$$CS^h(0,1) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Psi(c(1),c(0))} p_i^h(c^h(t)) dc_i^h = u^h(1) - u^h(0).$$

В кардиналистской экономической теории XIX в., если потребитель имеет единственную функцию полезности, представляющую его предпочтения, эта функция полезности является квазилинейной относительно товара-измерителя.

Данная теорема является следствием математической теории линейных интегралов (принятой на Западе) или, что лучше, теории криволинейных интегралов второго рода¹ и в то же время является следствием предложения 1. А именно, в предложении 1 мы показали, что вдоль любой (слабо) монотонной траектории существует функция полезности, имеющая единичную предельную полезность товара-измерителя вдоль только этой траектории. Зафиксируем произвольное состояние $c^h(0)$ и положим $u^h(0) = \tilde{u}^h(0)$ как в доказательстве предложения 1. Тогда функция $u^h(1)$ в теореме 1 есть в точности искомая функция полезности для любого состояния $c^h(1)$ (она аналог функции $\tilde{u}^h(\hat{c}^h)$ в доказательстве предложения 1). Эта функция имеет единичную предельную полезность товара-измерителя, так как резервная цена второго товара равна единице. Достаточно взять производную $u^h(1)$ по $c_2^h(1)$, как в доказательстве предложения 1. Если бы резервная цена товара-измерителя не была равна единице, то и предельная полезность измерителя не была бы единичной. Но поскольку излишек потребителя не зависит от траектории в данной теореме, и поскольку цена измерителя фиксирована к единице, функция полезности $u^h(1)$ имеет единичную предельную полезность измерителя вдоль любой траектории, в силу эквивалентности пп. 2 и 3 данной теоремы. Это означает, что независимый от траектории излишек потребителя порождает квазилинейную функцию полезности вдоль любой траектории.

Если излишек потребителя не является независимым от траектории, как в случае функций полезности Кобба – Дугласа, то мы не можем утверждать, что единичная

¹ Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1983. 448 с.

цена измерителя приводит к квазилинейности функций полезности на любой траектории.

Проверим то, что независимый от траектории обобщенный излишек потребителя равен изменению в квазилинейной функции полезности потребителя:

$$\begin{aligned} CS^h(0,1) &= \int_0^1 MU_1^h \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} dt + c_2^h(1) - c_2^h(0) = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial u^h(c^h)}{\partial c_1^h} \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} + \frac{\partial u^h(c^h)}{\partial c_2^h} \frac{\partial c_2^h(t)}{\partial t} \right) dt = \int_0^1 \frac{\partial u^h(t)}{\partial t} dt = u^h(1) - u^h(0). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали то, что $p_1^h = MU_1^h / MU_2^h = MU_1^h = \partial u^h(c^h) / \partial c_1^h$, так как предельная полезность измерителя равна единице для квазилинейной полезности.

Мы только что показали, что независимый от траектории излишек потребителя тождественно равен изменению квазилинейной функции полезности вдоль любой траектории. Это означает, что данная функция полезности является потенциальной функцией для соответствующего линейного интеграла (криволинейного интеграла). Также это означает, что обобщенный излишек потребителя независим от траектории: его значение одно и то же на любом пути интегрирования.

Мы можем легко продемонстрировать эквивалентность пп. 1 и 2 (см. соответствующую математическую литературу). Если излишек потребителя не зависит от траектории, то для любых двух путей, соединяющих два состояния $\psi^1(s, s') \in \psi(s, s')$, $\psi^2(s, s') \in \psi(s, s')$ $\psi^1 \neq \psi^2$, имеем $CS^1(\psi^1(s, s')) = CS^1(\psi^2(s, s'))$.

Однако излишек потребителя вдоль замкнутой траектории равен

$CS^1(\psi(s, s)) = CS^1(\psi^1(s, s')) + CS^1(\psi^3(s', s))$. Здесь $\psi^3(\cdot)$ есть просто другая траектория, соединяющая s' и s . Из теории криволинейных интегралов второго рода вытекает, что $CS^1(\psi^3(s', s)) = -CS^1(\psi^2(s, s'))$, где $\psi^2(\cdot)$ есть та же траектория, что и $\psi^3(\cdot)$, но взятая с противоположной ориентацией. Соединяя эти выражения и используя факт независимости от траектории, получаем (рис. 2):

$$CS^1(\psi(s, s)) = CS^1(\psi^1(s, s')) - CS^1(\psi^2(s, s')) = 0.$$

Чтобы доказать утверждение относительно кардиналистской теории XIX в., применим снова предложение 1. Если потребитель имеет единственную функцию полезности, то эта функция должна быть функцией $\tilde{u}^h$, построенной в этом предложении. Но это всегда квазилинейная функция по товару-измерителю. Для нее излишек потребителя всегда независим от траектории. Q.E.D.

Доказанная теорема утверждает, что интеграл излишка потребителя является независимым от траектории и в то же время является мерой полезности, тогда и только тогда предпочтения потребителя являются квазилинейными по отношению к товару-измерителю. Теорема говорит, что если мы не вводим ограничение в множество допустимых траекторий, то обобщенный излишек потребителя должен быть независим от траектории, чтобы корректно представлять изменение в полезности потребителя. Таким образом, теорема 1 воспроизводит результаты Д. Чипмана и Д. Мура, но в рамках теории общего равновесия.

Экономический смысл теоремы 1 наглядно изображен на *рис. 3*. На нем представлена замкнутая траектория $A \overset{23}{\curvearrowright} B \overset{23}{\curvearrowright} C \overset{23}{\curvearrowright} D$, которая возвращается в первоначальное состояние $c(0)$, представленное точкой A . Весь путь состоит из четырех сегментов.

Вдоль сегментов BC и DA траектория идет вдоль кривых безразличия, так что индивидуальный излишек потребителя тождественно равен нулю. Вдоль сегмента AB излишек потребителя равен расстоянию между A и B :

$$CS^1(AB) = \int_0^{t_B} p_1^1(t) \frac{\partial c_1^1(t)}{\partial t} dt + c_2^1(t_B) - c_2^1(0) = \text{dist}(AB).$$

То же самое верно для сегмента CD , вдоль которого излишек потребителя равен расстоянию между C и D , взятому с отрицательным знаком:

$$CS^1(CD) = \int_{t_C}^{t_D} p_1^1(t) \frac{\partial c_1^1(t)}{\partial t} dt + c_2^1(t_D) - c_2^1(t_C) = \text{dist}(CD).$$

Общий излишек вдоль замкнутой траектории равен нулю, если и только если эти два расстояния равны:

$$CS^1(ABCD) = \text{dist}(AB) - \text{dist}(CD) = 0 \Leftrightarrow AB = CD.$$

Так как эти рассуждения должны быть равны для любой замкнутой траектории, то мы получаем, что излишек потребителя независим от траектории тогда и только тогда, когда кривые безразличия являются параллельно сдвинутыми кривыми. А это как раз случай квазилинейных предпочтений.

Есть и другая наглядная экономическая интерпретация *рис. 3*. Если путь движется из начальной точки A в конечную точку C , то тогда излишек потребителя вдоль сегментов ABC в точности равен эквивалентной вариации EV , так как EV показывает изменение полезности (в единицах товара-измерителя) при использовании первоначальных цен (вспомним, что излишек потребителя вдоль сегмента BC в точности равен нулю); и излишек потребителя вдоль сегментов ADC

в точности равен компенсирующей вариации CV , так как CV показывает изменение полезности (в единицах товара-измерителя) при использовании конечных цен. Вспомним, что излишек потребителя вдоль сегмента AD в точности равен нулю (см. работу Д. Шталя [15], где дано дальнейшее исследование этого вопроса). Определения CV и EV даны в работах Х. Вэриана. Так как излишки потребителя вдоль путей ABC и ADC равны друг другу, мы получаем: $CV = EV = \text{Излишек потребителя}$. Это известный факт для квазилинейных предпочтений, полностью соответствующий нашей теории.

Общий случай. Из наших рассуждений вытекает, что если мы введем ограничение во множестве допустимых траекторий, а именно, рассматривая излишек потребителя вдоль подмножества монотонных и слабо монотонных траекторий $\Psi^{mh} \cup \Psi^{pmh}$, то нет никакой необходимости в независимости от траектории излишка потребителя: что только требуется, это знакопостоянство предельного обобщенного излишка вдоль монотонной траектории. Излишек потребителя может быть зависимым от траектории на множестве Ψ^{mh} или Ψ^{pmh} , но тем не менее он будет служить в качестве точной меры благосостояния потребителя в единицах измерителя. Далее, вдоль замкнутой монотонной траектории излишек потребителя тождественно равен нулю: это траектория, вдоль которой резервные цены и потребление не меняются и $\partial SC^h(t) / \partial t = 0$ для $\forall t \in [0, 1]$. (так что теорема 1, требующая, чтобы излишек потребителя был равен нулю вдоль любой замкнутой траектории, здесь просто лишняя). Чтобы доказать этот простой факт, предположим, что существует некоторый сегмент интервала $[0, 1]$, вдоль которого излишек потребителя и полезность изменяются, скажем, растут. Тогда, чтобы путь был монотонным, вдоль всего интервала $[0, 1]$ полезность и излишек потребителя должны возрастать с предельной мерой $\partial SC^h / \partial t = 0$, что означает, что полезность в точке 1 будет строго выше, чем в точке 0. Но так как путь является замкнутым, полезность в состоянии $s(0)$ должна быть та же, что и в состоянии $s(1)$ – противоречие. Таким образом, мы не можем найти сегмент внутри интервала $[0, 1]$, вдоль которого излишек потребителя или полезность изменялись, из этого вытекает утверждение, что вдоль любой монотонной и замкнутой траектории излишек потребителя и изменение полезности (так же как предельный обобщенный излишек) равны нулю. Заметим, что вдоль немонотонной замкнутой траектории значение излишка потребителя в общем случае не равно нулю, и это означает, что излишек не является мерой изменения полезности вдоль любой траектории и для любых типов предпочтений человека. Заметим также, что слабо монотонный замкнутый путь или траектория для потребителя не существует (но существует для общественного излишка потребителя). Чтобы доказать это, вспомним, что интервал $[0, 1]$ должен состоять в этом случае из нескольких сегментов, вдоль одних полезность не должна меняться, вдоль других она, например, должна монотонно возрастать. Тогда полезность в состоянии $s(1)$ должна быть выше, чем в состоянии $s(0)$, так как излишек потребителя корректно измеряет изменение полезности вдоль

любой слабо монотонной траектории. Но так как путь является замкнутым, то полезность в состоянии $s(0)$ должна быть той же, что и в состоянии $s(1)$ – опять противоречие. На *рис. 4* представлена таксономия (классификация) траекторий для теории излишка потребителя.

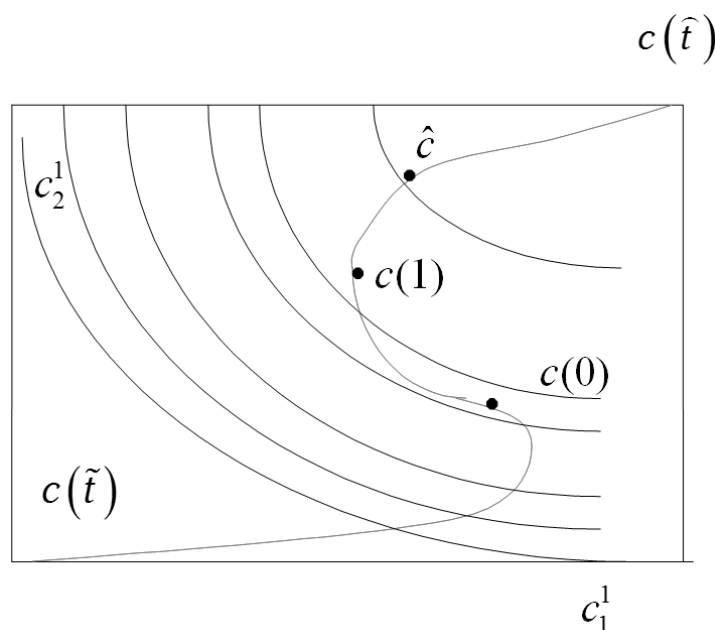
В соответствии с полученными результатами мы в дальнейшем будем анализировать агрегированный обобщенный излишек на Ψ^{pm} – подмножестве слабо-монотонных траекторий для общества и на Ψ^m – подмножестве монотонных траекторий для общества.

Рисунок 1

(Слабо) монотонная траектория в ящике Эджуорта

Figure 1

(Weakly) monotone trajectory in the Edgeworth box

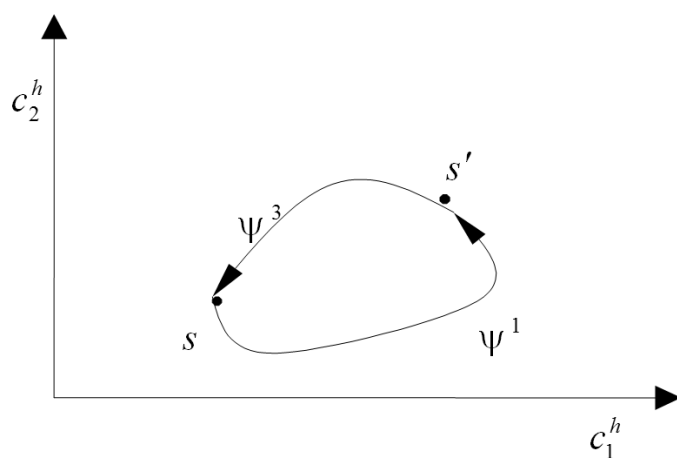


Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Рисунок 2
Замкнутая траектория в ящике Эджуорта

Figure 2
Closed trajectory in the Edgeworth box

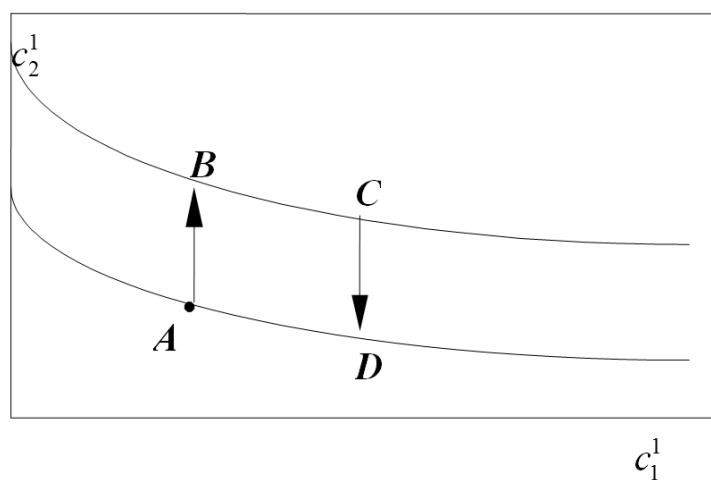


Источник: авторская разработка

Source: Authoring

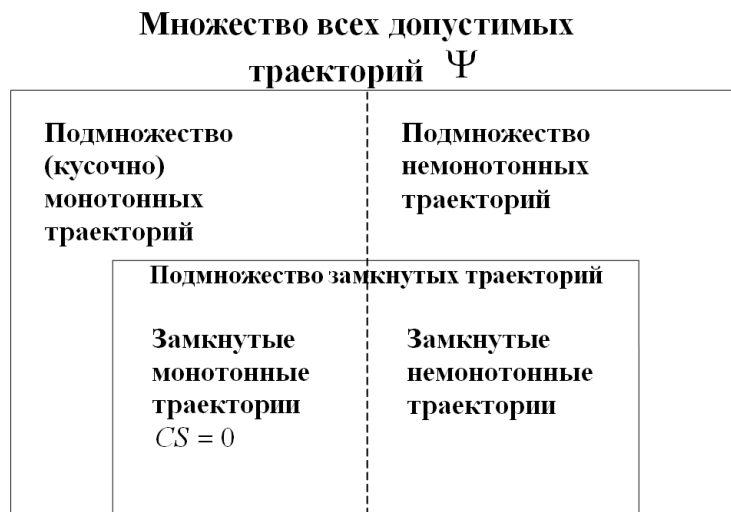
Рисунок 3
Квазилинейные предпочтения в ящике Эджуорта

Figure 3
Quasilinear preferences in the Edgeworth box



Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Рисунок 4**Таксономия траекторий****Figure 4****Taxonomy of trajectories**

Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Список литературы

1. *Dupuit J.* On the Measurement of Public Works. In: Kenneth J. Arrow and Tibor Scitovsky (Eds) *Readings in Welfare Economics*. Homewood, 1969, pp. 255–283.
2. *Москальонов С.А.* Маршаллианский излишек потребителя и современная неоклассическая теория общественного благосостояния // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Общественные науки*. 2007. № 1. С. 53–62. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/marshallianskiy-izlishek-potrebitelya-i-sovremennaya-neoklassicheskaya-teoriya-obschestvennogo-blagosostoyaniya>
3. *Marshall A.* *Principles of Economics*, vol. I. London and New York, Macmillan and Co., 1890, 754 p.
4. *Samuelson P.A.* Constancy of the Marginal Utility of Income. In: Oscar Lange et al. (Eds) *Studies in Mathematical Economics and Econometrics. In Memory of Henry Schultz*. Chicago, 1942, pp. 75–91.
5. *Hicks J.R.* The Foundations of Welfare Economics. *The Economic Journal*, 1939, vol. 49, iss. 196, pp. 696–712. URL: <https://doi.org/10.2307/2225023>
6. *Hicks J.R.* Consumers' Surplus and Index-Numbers. *The Review of Economic Studies*, 1942, vol. 9, iss. 2, pp. 126–137. URL: <https://doi.org/10.2307/2967665>

7. *Chipman J.S., Moore J.* The Scope of Consumer' Surplus Arguments. In: A.M. Tang et al. (Eds) *Evolution, Welfare and Time in Economics: Essays in Honor of Nikolas Reorgescu-Roegen*. Lexington, Health-Lexington Books, 1976, pp. 69–123.
8. *Chipman J.S., Moore J.* Compensating Variation, Consumer's Surplus, and Welfare. *The American Economic Review*, 1980, vol. 70, iss. 5, pp. 933–949.
URL: <https://www.jstor.org/stable/1805773>
9. *Slivinski A.* The Normative Characterization of Aggregate Consumers' Surplus Measures. *International Economic Review*, 1987, vol. 28, iss. 3, pp. 559–581.
URL: <https://doi.org/10.2307/2526567>
10. *Blackorby C., Donaldson D.* Market Demand Curves and Dupuit-Marshall Consumers' Surpluses: A General Equilibrium Analysis. *Mathematical Social Sciences*, 1999, vol. 37, iss. 2, pp. 139–163. URL: [https://doi.org/10.1016/S0165-4896\(98\)00022-5](https://doi.org/10.1016/S0165-4896(98)00022-5)
11. *Москальонов С.А.* Индивидуальный излишек потребителя в ящике Эджуорта // *Экономический анализ: теория и практика*. 2021. Т. 20. Вып. 11. С. 2151–2167.
URL: <https://doi.org/10.24891/ea.20.11.2151>
12. *Silberberg E.* Duality and the Many Consumer's Surpluses. *The American Economic Review*, 1972, vol. 62, iss. 5, pp. 942–952. URL: <https://www.jstor.org/stable/1815211>
13. *Burns M.E.* A Note on The Concept and Measure of Consumer's Surplus. *The American Economic Review*, 1973, vol. 63, no. 3, pp. 335–344.
URL: <https://www.jstor.org/stable/1914365>
14. *Zajac E.E.* Dupuit-Marshall Consumers' Surplus, Utility, and Revealed Preference. *Journal of Economic Theory*, 1979, vol. 20, iss. 2, pp. 260–270.
URL: [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(79\)90074-7](https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90074-7)
15. *Stahl D.O.* A Note on the Consumer Surplus Path-of-Integration Problem. *Economica*, 1983, vol. 50, iss. 197, pp. 95–98. URL: <https://doi.org/10.2307/2554125>

Информация о конфликте интересов

Я, автор данной статьи, со всей ответственностью заявляю о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи. Настоящее заявление относится к проведению научной работы, сбору и обработке данных, написанию и подготовке статьи, принятию решения о публикации рукописи.

CONSUMER SURPLUS IN THE EDGEWORTH BOX: INDIVIDUAL CASE AND GENERAL CASE

Sergei A. MOSKAL'ONOV

Ulyanovsk State University (USU),
Ulyanovsk, Russian Federation
moskalionov@yahoo.com
<http://orcid.org/0000-0002-8681-2338>

Article history:

Article No. 498/2022
Received 31 Oct 2022
Received in revised form
11 November 2022
Accepted 30 Nov 2022
Available online
30 January 2023

JEL classification: D11,
D61

Keywords: consumer
surplus, Edgeworth box,
path independence, utility
function

Abstract

Subject. The article considers weakly cardinal properties of the generalized individual consumer surplus on the simple exchange economy (Edgeworth box) case.

Objectives. The aim is to find the new weakly cardinal properties of individual consumer surplus in the Edgeworth box economy in the quasilinear case and in the general case.

Methods. The study draws on methods of logical and mathematical analysis. The generalized consumer surplus theory is investigated using the mathematical theory of the curve integrals of the second type.

Results. Individual surplus generates money metric utility function with unitary marginal utility of numeraire in the Edgeworth box. The paper gives the definition of consumer surplus' path-independence property, proves the theorem that path-independent consumer surplus is equivalent to the existence of consumer's quasilinear preferences in a simple exchange economy, presents the characterization of general case of consumer surplus in the Edgeworth box, and provides general taxonomy of trajectories (adjustment paths) in the Edgeworth box.

Conclusions. The generalized individual consumer surplus generates money metric utility function along monotone (weakly monotone) trajectories in the Edgeworth box. If consumer is a buyer of the first good, I again demonstrate that consumer surplus is presented as an area between the reservation price function and the reallocation line (curve).

© Publishing house FINANCE and CREDIT, 2022

Please cite this article as: Moskal'onov S.A. Consumer Surplus in the Edgeworth Box: Individual Case and General Case. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2023, vol. 22, iss. 1, pp. 152–171.
<https://doi.org/10.24891/ea.22.1.152>

Acknowledgments

The research was supported by grants of the Economics Education and Research Consortium, projects № R03-1421 and № R04-0251.

I am deeply grateful to Richard ERICSON, Professor, V.M. POLTEROVICH, Academician, Doctor of Economics, S.V. ARZHENOVSKII, Doctor of Economics, S.V. SAVVATEEV, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, V.K. GORBUNOV, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, K.I. SONIN, Candidate of Physical

and Mathematical Sciences, A.E. ETKIN, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, S.G. KARAKOZOV, Candidate of Economic Sciences, S.Yu. KOVALEV, Professor, and Ju JIANDONG, Professor, for their valuable comments and recommendations.

References

1. Dupuit J. On the Measurement of Public Works. In: Kenneth J. Arrow and Tibor Scitovsky (Eds) *Readings in Welfare Economics*. Homewood, 1969, pp. 255–283.
2. Moskal'onov S.A. [Marshallian Consumer Surplus and Modern Neoclassical Theory of Social Welfare]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Obshchestvennye nauki = University Proceedings. Volga Region. Social Sciences*, 2007, no. 1, pp. 53–62. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/marshallianskiy-izlishek-potrebitelya-i-sovremennaya-neoklassicheskaya-teoriya-obshchestvennogo-blagosostoyaniya> (In Russ.)
3. Marshall A. *Principles of Economics*, vol. I. London and New York, Macmillan and Co., 1890, 754 p.
4. Samuelson P.A. Constancy of the Marginal Utility of Income. In: Oscar Lange et al. (Eds) *Studies in Mathematical Economics and Econometrics. In Memory of Henry Schultz*. Chicago, 1942, pp. 75–91.
5. Hicks J.R. The Foundations of Welfare Economics. *The Economic Journal*, 1939, vol. 49, iss. 196, pp. 696–712. URL: <https://doi.org/10.2307/2225023>
6. Hicks J.R. Consumers' Surplus and Index-Numbers. *The Review of Economic Studies*, 1942, vol. 9, iss. 2, pp. 126–137. URL: <https://doi.org/10.2307/2967665>
7. Chipman J.S., Moore J. The Scope of Consumer' Surplus Arguments. In: A.M. Tang et al. (Eds). *Evolution, Welfare and Time in Economics: Essays in Honor of Nikolas Reorgescu-Roegen*. Lexington, Health-Lexington Books, 1976, pp. 69–123.
8. Chipman J.S., Moore J. Compensating Variation, Consumer's Surplus, and Welfare. *The American Economic Review*, 1980, vol. 70, iss. 5, pp. 933–949. URL: <https://www.jstor.org/stable/1805773>
9. Slivinski A. The Normative Characterization of Aggregate Consumers' Surplus Measures. *International Economic Review*, 1987, vol. 28, iss. 3, pp. 559–581. URL: <https://doi.org/10.2307/2526567>
10. Blackorby C., Donaldson D. Market Demand Curves and Dupuit-Marshall Consumers' Surpluses: A General Equilibrium Analysis. *Mathematical Social Sciences*, 1999, vol. 37, iss. 2, pp. 139–163. URL: [https://doi.org/10.1016/S0165-4896\(98\)00022-5](https://doi.org/10.1016/S0165-4896(98)00022-5)

11. Moskal'onov S.A. [Individual consumer surplus in the Edgeworth Box].
Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika = Economic Analysis: Theory and Practice, 2021, vol. 20, iss. 11, pp. 2151–2167. (In Russ.)
URL: <https://doi.org/10.24891/ea.20.11.2151>
12. Silberberg E. Duality and the Many Consumer's Surpluses. *The American Economic Review*, 1972, vol. 62, iss. 5, pp. 942–952. URL: <https://www.jstor.org/stable/1815211>
13. Burns M.E. A Note on the Concept and Measure of Consumer's Surplus. *The American Economic Review*, 1973, vol. 63, no. 3, pp. 335–344.
URL: <https://www.jstor.org/stable/1914365>
14. Zajac E.E. Dupuit-Marshall Consumers' Surplus, Utility, and Revealed Preference. *Journal of Economic Theory*, 1979, vol. 20, iss. 2, pp. 260–270.
URL: [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(79\)90074-7](https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90074-7)
15. Stahl D.O. A Note on the Consumer Surplus Path-of-Integration Problem. *Economica*, 1983, vol. 50, iss. 197, pp. 95–98. URL: <https://doi.org/10.2307/2554125>

Conflict-of-interest notification

I, the author of this article, bindingly and explicitly declare of the partial and total lack of actual or potential conflict of interest with any other third party whatsoever, which may arise as a result of the publication of this article. This statement relates to the study, data collection and interpretation, writing and preparation of the article, and the decision to submit the manuscript for publication.