

ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ИЗЛИШЕК ПОТРЕБИТЕЛЯ В ЯЩИКЕ ЭДЖУОРТА*

Сергей Александрович МОСКАЛЬОНОВ

кандидат экономических наук, доцент кафедры экономической теории,
Ульяновский государственный университет (УлГУ),
Ульяновск, Российская Федерация
moskalionov@yahoo.com
<http://orcid.org/0000-0002-8681-2338>
SPIN-код: 3599-2745

История статьи:

Рег. № 501/2021
Получена 06.09.2021
Получена в
доработанном виде
17.09.2021
Одобрена 30.09.2021
Доступна онлайн
29.11.2021

УДК 330.42

JEL: D11, D61

Ключевые слова:

излишек потребителя,
ящик Эджуорта,
индивидуальное
благополучие,
функция полезности

Аннотация

Предмет. Концепция излишка потребителя является важнейшей составной частью современной микроэкономической теории вводного и промежуточного уровней. Излишек потребителя измеряет изменение реального благосостояния потребителя. Рассматриваются особенности построения и главное свойство обобщенного индивидуального излишка потребителя на примере простой экономики обмена – ящика Эджуорта.

Цели. Нахождение главного свойства индивидуального излишка потребителя в ящике Эджуорта.

Методология. Использовались методы логического и математического анализа. Обобщенный излишек потребителя корректно строится с использованием математической теории криволинейных интегралов второго рода (теории линейных интегралов в западной математической литературе).

Результаты. Обобщенный индивидуальный излишек потребителя определяется через соответствующий криволинейный интеграл вдоль некоторой допустимой траектории в простой экономике обмена (ящике Эджуорта). Вводится также понятие предельного индивидуального излишка потребителя. Показано, что излишек потребителя является корректной мерой индивидуального благосостояния в ящике Эджуорта, а также что излишек потребителя равен нулю вдоль любой кривой безразличия. Рассмотрен численный пример расчета и представления индивидуального излишка потребителя в ящике Эджуорта.

Выводы. Обобщенный индивидуальный излишек потребителя является корректной мерой изменения полезности потребителя вдоль монотонных (слабо монотонных) траекторий в ящике Эджуорта. Геометрически излишек потребителя представлен как площадь, ограниченная сверху кривой резервной цены и снизу – линией (кривой) реаллокации.

© Издательский дом ФИНАНСЫ и КРЕДИТ, 2021

* Исследование осуществлялось при поддержке грантов Консорциума экономических исследований и образования, проекты № R03-1421, R04-0251.

Автор глубоко признателен профессору Ричарду Эрикссону, академику, доктору экономических наук В.М. Полтеровичу, доктору экономических наук С.В. Арженовскому, доктору физико-математических наук А.В. Савватееву, доктору физико-математических наук В.К. Горбунову, кандидату физико-математических наук К.И. Сониному, кандидату физико-математических наук А.Е. Эткину, кандидату экономических наук С.Г. Каракозову, профессору С.Ю. Ковалеву, профессору Джизандонгу Джу за ценные замечания и рекомендации.

Для цитирования: Москальонов С.А. Индивидуальный излишек потребителя в ящике Эджуорта // *Экономический анализ: теория и практика*. – 2021. – Т. 20, № 11. – С. 2151 – 2167.
<https://doi.org/10.24891/ea.20.11.2151>

Концепция излишка потребителя хорошо известна и широко используется в преподавании вводного, промежуточного и даже некоторых разделов продвинутого уровня микроэкономической теории для наглядного изображения изменения благосостояния экономических агентов. Излишек потребителя применяется в теории международной торговли, в теории частичного рыночного равновесия, в теории избыточного налогового бремени, в теории монополии и олигополии, в теории экстерналий. Практически нет такого раздела курса микроэкономики, где эта простая и наглядная концепция не нашла бы своего применения.

История концепции излишка потребителя восходит к первой половине XIX в., когда Жюль Дюпюи, известный французский инженер, в своей работе [1] аргументировал, что общая польза (в денежном выражении) от строительства моста через реку превышает денежные затраты на строительство этого моста. За более чем полувека, прошедшие со времени выхода этой классической статьи, было опубликовано более 200 работ по теории излишка потребителя. Здесь мы перечислим лишь наиболее важные результаты, ставшие общеизвестными и в некотором смысле слова классическими.

Альфред Маршалл [2] был одним из первых математиков-экономистов, кто заметил, что концепция излишка потребителя Дюпюи может быть строго применена лишь в случае единичной предельной полезности денег. В общем же случае, когда предельная полезность денег не равна единице, излишек потребителя работает лишь как некоторое первоначальное приближение.

В дальнейшем концепция излишка потребителя подвергалась лишь все более ожесточенной критике. Например, лауреат Нобелевской премии Пол Самуэльсон [3] показал, что предельная полезность денег никогда не может быть постоянной при отсутствии каких-либо ограничений на цены и бюджет потребителя. Поэтому он назвал излишек потребителя Дюпюи бесполезной теоретической игрушкой. Другой Нобелевский лауреат Джон Хикс [4, 5] также отверг концепцию излишка потребителя как интеграла от ординарной (Вальрасовской) функции спроса. Вместо нее он предложил теорию «четырех излишков» – эквивалентной, компенсирующей вариации, эквивалентного и компенсирующего излишков как интегралов от компенсированной (Хиксианской) функции спроса. Современные учебники по микроэкономике промежуточного и продвинутого уровней как раз представляют в основном взгляды Д.Р. Хикса.

В некотором смысле классическими стали известные работы Д. Чипмана и Д. Мура [6, 7]. В них авторы аргументируют, что интеграл излишка потребителя (линейный интеграл в формулировке западной математической литературы) должен быть

всегда независим от траектории для того, чтобы представлять собой изменение в полезности потребителя. Если ввести ограничения в бюджетном пространстве, то интеграл излишка потребителя будет независимым от траектории только если предпочтения потребителя гомотетичны или квазилинейны. Это очень сильное ограничение в теории излишка потребителя означает, что он фактически не может быть использован для реалистичных предпочтений, так как наши предпочтения в общем случае не являются ни гомотетичными, ни квазилинейными. Из более современных работ, посвященных проблеме независимости от траектории агрегированного (общественного) излишка потребителя, упомянем статьи А. Сливински [8] и Ч. Блэкорби и Д. Доналдсона [9], которые фактически воспроизвели результаты Д. Чипмана и Д. Мура для совокупного излишка.

В наших исследованиях [10, 11] частично отвергалась столь жесткая критика в адрес теории излишка потребителя. Вместо независимого от траектории излишка потребителя мы рассматриваем зависимый от траектории криволинейный интеграл (зависимый от траектории излишек потребителя рассматривался в ряде работ, например в статье Е. Силберберга [12]). Вместо ограничения в пространстве допустимых предпочтений мы вводим ограничения в пространстве допустимых траекторий (что всегда возможно). Сужение множества допустимых траекторий позволяет избавиться от ограничения на допустимые предпочтения: в нашей теории излишек потребителя работает для широкого класса допустимых предпочтений. Таким образом, мы развиваем идеи, заложенные в работах М. Бернса [13], Е. Зайака [14] и Д. Шталя [15]. В данной работе рассматриваются приложения нашей теории излишка потребителя к простой экономике обмена – ящику Эджуорта.

Рассмотрим модель простой экономики обмена – ящика Эджуорта. Будем считать, что в экономике $H = 2$ потребителя, пронумерованных $h = 1, 2$ и $N = 2$ потребительских товара, пронумерованных $i = 1, 2$.

Зададим вектор совокупных запасов товаров в форме $\bar{\omega}(t) \in \bar{\Omega} \equiv \mathbb{R}_+^2$, где $\bar{\Omega}$ – множество всех (неотрицательных) векторов совокупных запасов. Вектор валового спроса или потребления агента h в точке или состоянии t задан как $c^h(t)$, распределение товаров – вектор $c(t) = (c^1(t), c^2(t)) \in \mathbb{R}_+^4$. Распределение товаров (аллокация) c считается допустимым, если $\sum_{h=1}^2 c_i^h = \bar{\omega}_i$ для каждого i .

Обозначим вектор резервных цен потребителей как $p(t) = ((p_1^1, p_2^1); (p_1^2, p_2^2)) > 0$.

В данном случае обобщается модель резервной цены и излишка потребителя, разработанная в работах Хэла Вэриана для специального случая квазилинейных предпочтений: p_1^1 и p_1^2 – резервные цены потребителей для первого товара и

p_2^1, p_2^2 – резервные цены для второго товара. Второй товар является товаром-измерителем (numeraire): $p_2 = p_2^1 = p_2^2 = 1$.

Зададим (фактический) коэффициент перераспределения (реаллокации) для первого потребителя:

$$r_1^1(t) := -\partial \tilde{c}_2^1(c_1^1(t)) / \partial c_1^1(t) \Big|_{\text{вдоль } c(t)} = -(\partial c_2^1(t) / \partial t) / (\partial c_1^1(t) / \partial t)$$

и для второго потребителя:

$$r_1^2(t) := -\partial \tilde{c}_2^2(c_1^2(t)) / \partial c_1^2(t) \Big|_{\text{вдоль } c(t)} = -(\partial c_2^2(t) / \partial t) / (\partial c_1^2(t) / \partial t).$$

Функции $\tilde{c}_2^h(c_1^h)$ выводятся из уравнений траектории экономики, то есть они отображают зависимости валового спроса на второй товар от валового спроса на первый товар вдоль заданной траектории.

Далее рассматривается направленная непрерывная (кусочно) гладкая кривая (линия или последовательность линейных сегментов) $c(t)$ на интервале состояний $[0,1]$, порожденная траекторией или путем $c = \psi(t)$.

Обобщенный излишек для потребителя h задается с помощью теории криволинейных интегралов второго рода (в западной математической литературе – аппарата линейных интегралов) следующим образом:

$$\begin{aligned} CS^h(0,1) &= p^h(1)c^h(1) - p^h(0)c^h(0) - \int_0^1 c_1^h(t) \frac{\partial p_1^h(t)}{\partial t} dt = \\ &= \int_0^1 p_1^h(t) \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} dt + c_2^h(1) - c_2^h(0) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\psi(c,c')} p_i^h(c^h(t)) dc_i^h = CS^h(\psi(c,c')), \end{aligned} \quad (1)$$

где $c = \psi(0)$, $c' = \psi(1)$.

Эти соотношения могут быть выведены при помощи интегрирования по частям и из тождества:

$$\partial(p^h(t)c^h(t)) / \partial t = p^h(t)\partial c^h(t) / \partial t + c^h(t)\partial p^h(t) / \partial t.$$

Предельный или мгновенный излишек для потребителя h определяется с помощью операции дифференцирования:

$$\begin{aligned}\frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} &= \frac{\partial(p^h(t)c^h(t))}{\partial t} - c_1^h(t) \frac{\partial p_1^h(t)}{\partial t} = \\ &= p_1^h(t) \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} + \frac{\partial c_2^h(t)}{\partial t}.\end{aligned}\quad (2)$$

Начнем анализ с теории индивидуального излишка потребителя. Траектория (параметризация) будет называться монотонной, если предельный излишек потребителя (2) сохраняет знак вдоль траектории. Траектория является слабо монотонной, если предельный излишек потребителя равен нулю вдоль некоторых сегментов траектории, и сохраняет знак вдоль остальных сегментов траектории. Чтобы вывести новую формулу для индивидуального излишка потребителя h , возьмем полную производную его функции полезности по некоторой заданной траектории $c(t)$:

$$\frac{\partial u^h(c^h(t))}{\partial t} = \frac{\partial u^h(c^h)}{\partial c_1^h} \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} + \frac{\partial u^h(c^h)}{\partial c_2^h} \frac{\partial c_2^h(t)}{\partial t}.$$

Резервная цена второго товара в данной работе равна единице, однако этот факт не предполагает здесь в общем случае какого-либо ограничения в допустимом предпочтении потребителя h , потому что мы не требуем здесь независимости обобщенного излишка (1) от траектории. Вообще обобщенный излишек потребителя зависим от траектории.

Предельная полезность второго товара является аналогом множителя Лагранжа λ^h потребителя h , это предельная полезность товара-измерителя. Разделим обе стороны уравнения на предельную полезность товара-измерителя, чтобы получить:

$$\frac{1}{\lambda^h} \frac{\partial u^h(c^h(t))}{\partial t} = -MRS^h(c(t)) \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} + \frac{\partial c_2^h(t)}{\partial t}.$$

Предельная норма замещения (со знаком минус) равна по определению резервной цене первого товара $p_1^h(t)$ (цена товара-измерителя – единица). Таким образом, мы имеем:

$$\frac{1}{\lambda^h} \frac{\partial u^h(c^h(t))}{\partial t} = p_1^h(t) \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} + \frac{\partial c_2^h(t)}{\partial t} \quad (3)$$

или

$$\frac{1}{\lambda^h(t)} \frac{\partial u^h(t)}{\partial t} = \frac{\partial CS^h(t)}{\partial t}. \quad (4)$$

Мы получили важную формулу, которая связывает изменение в предельном излишке потребителя по траектории с предельным изменением в полезности потребителя h по этой же траектории. Поскольку предпочтения потребителей, по предположению, являются строго монотонными, предельная полезность товар-измерителя положительна: $\lambda^h = \partial u^h(c^h) / \partial c_2^h > 0$ и знак предельного изменения полезности по траектории совпадает со знаком предельного излишка потребителя по траектории для строго монотонных предпочтений. Если предельный излишек положителен, то предельное изменение в полезности положительно, если он отрицателен, предельное изменение в полезности также отрицательно, если он равен нулю, полезность или реальное благосостояние не изменяется. Если траектория слабо монотонная, $\partial CS^h(t) / \partial t$ тот же самый знак по всей траектории, поэтому предельное изменение в полезности имеет тот же знак вдоль этой траектории. Так, если CS^h монотонно увеличивается (уменьшается, равен нулю) по траектории, то то же самое происходит с полезностью потребителя.

Формально

$$\frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u^h(t)}{\partial t} > 0;$$

$$\frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u^h(t)}{\partial t} < 0;$$

$$\frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u^h(t)}{\partial t} = 0.$$

Интегрируя по t , мы получаем:

$$\frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} > 0 (< 0, = 0) \text{ и траектория (слабо) монотонна} \Leftrightarrow$$

$$CS^h(0,1) = \int_0^1 \frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} dt > 0 (< 0, = 0);$$

$$CS^h(0,1) > 0 \text{ и траектория (слабо) монотонна} \Leftrightarrow u^h(1) > u^h(0);$$

$$CS^h(0,1) < 0 \text{ и траектория (слабо) монотонна} \Leftrightarrow u^h(1) < u^h(0);$$

$$CS^h(0,1) = 0 \text{ и траектория (слабо) монотонна} \Leftrightarrow u^h(1) = u^h(0).$$

Таким образом, мы получили важный результат.

Предложение 1. Если полезность потребителя h в конечном состоянии c' больше (меньше, равна), полезности в начальной точке c , то $CS^h(c,c')$ положителен (отрицателен, равен нулю) по любой монотонной (слабо монотонной) траектории $\psi^{pm}(c,c')$, соединяющей два состояния.

Королларий 1. Обобщенный излишек потребителя h (1) равен нулю вдоль любой кривой безразличия для этого потребителя h .

Это просто следствие из предложения 1 и определения кривой безразличия. Если траектория идет вдоль кривой безразличия, то $\partial u^1(t)/\partial t = 0$: полезность не изменяется. Так как $\lambda^1 > 0$, мы получаем:

$$\frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} = \frac{1}{\lambda^h(t)} \frac{\partial u^h(t)}{\partial t} \Big|_{\text{along IC}} = 0;$$

$$CS^h(0,1) \Big|_{\text{along IC}} = \int_0^1 \frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} = 0.$$

Рассмотрим простую геометрическую иллюстрацию полученных результатов. Пусть предельный излишек для потребителя является положительным по траектории $\partial CS^h(t)/\partial t > 0$. Тогда получаем из (2)

$$p_1^1 \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} + \frac{\partial c_2^h(t)}{\partial t} > 0.$$

Предположим, что потребление первого товара потребителем увеличивается вдоль траектории $\partial c_1^h(t)/\partial t > 0$. Тогда, преобразовывая формулу, получаем:

$$p_1^h(t) > - \frac{\frac{\partial c_2^h(t)}{\partial t}}{\frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t}} = - \frac{\partial c_2^h(c_1^h)}{\partial c_1^h} \Big|_{\text{вдоль траектории}} = r_1^h(t). \quad (5)$$

Иначе говоря, если излишек потребителя монотонно увеличивается вдоль траектории, то резервная цена $p_1^h(t)$ потребителя в каждой точке траектории должна быть больше, чем коэффициент реаллокации r_1^{he} для этого потребителя. Или, что эквивалентно, наклон кривой безразличия (в каждой точке пересечения с траекторией) по модулю должен быть больше, чем наклон траектории, взятый по модулю. Вспомним, что резервная цена всегда является положительной величиной (это модуль наклона кривой безразличия) и показывает максимальное количество товара-измерителя, которое потребитель готов отдать ради получения дополнительной предельной единицы первого товара. Так, положительный знак предельного излишка потребителя означает, что потребитель в каждой точке траектории готов отдать больше товара-измерителя для получения дополнительной (предельной) единицы первого товара, чем он фактически отдает, когда он движется по траектории. Если потребление обоих товаров этим потребителем увеличивается вдоль траектории, (5) автоматически выполняется: коэффициент реаллокации –

всегда отрицательная величина, но резервная цена – положительная величина, так что полезность монотонно увеличивается вдоль подобной траектории.

Пример для функции Кобба – Дугласа. На рис. 1 представлены наши идеи относительно излишка первого потребителя в ящике Эджуорта.

Жирная линия на рисунке представляет траекторию перераспределения, соединяющую исходное состояние $c(0)$ (в точке B) и конечное состояние $c(1)$. На рисунке абсолютно ясно, что в каждой точке траектории $tg\alpha > tg\gamma$, или что в каждой точке траектории наклон кривой безразличия по модулю больше, чем модуль наклона линии траектории. Это означает, что траектория в каждой точке пересечения с кривой безразличия движется в верхнее контурное множество, или строго предпочитаемое множество, для первого потребителя. Или, эквивалентно, это означает, что полезность потребителя монотонно увеличивается вдоль этой траектории.

На рис. 1 мы представили траекторию, определенную следующим образом:

$$c_1^1(t) = (1 - t) 4 + 15t = 4 + 11t \text{ и } c_2^1(t) = (1 - t) 9 + 6t = 9 - 3t.$$

Начальное распределение есть набор $(c^1(0), c^2(0)) = ((4,9); (16,6))$, конечное распределение – это набор $(c^1(1), c^2(1)) = ((15,6); (5,9))$. Предпочтения потребителей описываются функциями Кобба – Дугласа: $u^1 = (c_1^1)^{1/2} (c_2^1)^{1/2}$ и $u^2 = (c_1^2)^{3/4} (c_2^2)^{1/4}$.

Резервная цена первого потребителя равна $p_1^1(t) = c_2^1(t) / c_1^1(t) = (9 - 3t) / (4 + 11t)$, и коэффициент реаллокации равен $r_1^{1e} = -(\partial c_2^1(t) / \partial t) / (\partial c_1^1(t) / \partial t) = 3 / 11$. Легко проверить, что вдоль интервала $[0,1]$ резервная цена всегда больше фактического коэффициента реаллокации: траектория является монотонной для потребителя по заданному интервалу. Это верно также вдоль прямой линии слева и справа от наблюдаемой траектории: начиная от точки A на левой границе ящика Эджуорта, до точки, где линия траектории будет касаться кривой безразличия первого потребителя, его полезность монотонно увеличивается, также как его излишек потребителя. Мгновенная полезность потребителя равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1(t)}{\partial t} &= \left((4 + 11t)^{0,5} (9 - 3t)^{0,5} \right)' = \\ &= \frac{0,5 \cdot 11(9 - 3t)^{0,5}}{(4 + 11t)^{0,5}} - \frac{0,5 \cdot 3(4 + 11t)^{0,5}}{(9 - 3t)^{0,5}} = \\ &= \frac{43,5 - 33,1t}{(4 + 11t)^{0,5} (9 - 3t)^{0,5}} > 0. \end{aligned}$$

Предельный излишек первого потребителя:

$$\frac{\partial CS^1(t)}{\partial t} = \frac{9-3t}{4+11t} 11-3 = 4 \frac{87-66t}{4+11t} > 0.$$

В данном примере первый потребитель является чистым покупателем первого товара и чистым продавцом второго товара; второй потребитель в обратной ситуации, он является чистым продавцом первого товара и чистым покупателем второго товара.

Наш излишек потребителя имеет наглядное и привычное геометрическое представление. Чтобы представить его геометрически, рассмотрим сначала предельный излишек:

$$\frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} = p_1^h(t) \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} + \frac{\partial c_2^h(t)}{\partial t}.$$

Принимая во внимание, что $r_1^h = -(\partial c_2^h(t) / \partial t) / (\partial c_1^h(t) / \partial t)$, получаем:

$$\frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} = (p_1^h(t) - r_1^h(t)) \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t}.$$

Интегрируя по t , мы имеем:

$$CS^h(0,1) = \int_0^1 \frac{\partial CS^h(t)}{\partial t} dt = \int_0^1 (p_1^h(t) - r_1^h(t)) \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} dt. \quad (7)$$

Здесь мы предполагаем, что образ траектории не является вертикальной линией, так как в этом случае коэффициент реаллокации равен бесконечности и производная потребления равна нулю. Так как потребление является функцией от t , мы можем выразить t через c_1^h из функции $c_1^h(t)$. Это выражение t как функцию от c_1^h мы подставляем в функцию $c_2^h(t)$ и получаем функцию $\tilde{c}_2^h(c_1^h)$, которая будет действовать вдоль пути $c_1^h(t)$. Так как резервная цена $p_1^h(c_1^h(t), c_2^h(t))$ и коэффициент реаллокации $r_1^h(c_1^h(t), c_2^h(t))$ являются функциями от потребления и только косвенно зависят от t , мы можем всегда подставить новую функцию $c_2^h(c_1^h)$ в эти функции резервной цены и коэффициента реаллокации и выразить эти переменные как функции только от c_1^h вдоль заданной траектории $c_1^h(t)$. Эти функции следующие: $\tilde{p}_1^h(c_1^h, \tilde{c}_2^h(c_1^h))$ и $\tilde{r}_1^h(c_1^h, \tilde{c}_2^h(c_1^h))$. Тогда (7) преобразуется в следующее выражение:

$$CS^h(0,1) = \int_0^1 (p_1^h(t) - r_1^h(t)) \frac{\partial c_1^h(t)}{\partial t} dt = \int_{c_1^h(0)}^{c_1^h(1)} (\tilde{p}_1^h(c_1^h) - \tilde{r}_1^h(c_1^h)) dc_1^h. \quad (8)$$

Новая формула показывает, что индивидуальный излишек потребителя вдоль (слабо) монотонной траектории может быть всегда представлен геометрически как область (площадь) между кривой резервной цены и кривой или линией коэффициента реаллокациями или меновой стоимости для процесса Эджуорта, (см. работы Т. Негиши и Г. Юзавы [16, 17]) – кривой или линией реаллокации. Это означает, что теория резервной цены и излишка потребителя имеет силу не только для квазилинейных предпочтений, но также и для любого строго монотонного, строго выпуклого предпочтения, что мы проверяем для случая функции Кобба – Дугласа.

Рассмотрим, как наш подход работает в численном примере. Резервная цена для первого потребителя имеет следующий вид: $p_1^1(t) = (9 - 3t) / (4 + 11t)$. Тогда излишек первого потребителя равен

$$\begin{aligned} CS^1(0,1) &= \int_0^1 p_1^1(t) \frac{\partial c_1^1(t)}{\partial t} dt + c_2^1(1) - c_2^1(0) = \\ &= \int_0^1 \frac{9-3t}{4+11t} 11 dt - 3 = \int_0^1 \left[\frac{10+1/11}{4/11+t} - 3 \right] dt - 3 = -6 + \frac{111}{11} \left(\ln \frac{15}{11} - \ln \frac{4}{11} \right) = -6 + \frac{111}{11} \ln \frac{15}{4} > 0. \end{aligned}$$

Выражая t из уравнения траектории для первого товара, получаем: $t = (c_1^1 / 11) - 4 / 11$. Затем подставляем это выражение в уравнение для второго товара: $c_2^1(t) = 9 - 3c_1^1 = (111/11) - (3/11)c_1^1$. Таким образом, мы выразили потребление второго товара через потребление первого товара. Теперь найдем уравнение для резервной цены:

$$p_1^1(t) = \frac{c_2^1(t)}{c_1^1(t)} = \frac{111}{11c_1^1} - \frac{3}{11}.$$

Норма реаллокации равна $r_1^{1e} = -(\partial c_2^1(t) / \partial t) / (\partial c_1^1(t) / \partial t) = 3/11$. Если подставить эти функции цен в (7), то получится тот же самый излишек:

$$\begin{aligned} CS^1(0,1) &= \int_{c_1^1(0)}^{c_1^1(1)} \left(\tilde{p}_1^h(c_1^h) - \tilde{r}_1^h(c_1^h) \right) dc_1^h = \int_4^{15} \left[\frac{111}{11c_1^1} - \frac{6}{11} \right] dc_1^1 = \\ &= -\frac{6}{11} 11 + \frac{111}{11} (\ln 15 - \ln 4) = -6 + \frac{111}{11} \ln \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Мы видим, что наши расчеты приводят к одинаковым значениям для излишка потребителя, что подтверждает правильность предложенного подхода: излишек потребителя от покупки товара или реаллокации вдоль (слабо) монотонной траектории всегда может быть представлен как область между линией резервной

цены и кривой или линией реаллокации (или линией обмена для процесса Эджуорта). На *рис. 2* представлен знаменитый треугольник излишка потребителя, но для случая неквазилинейных предпочтений Кобба – Дугласа.

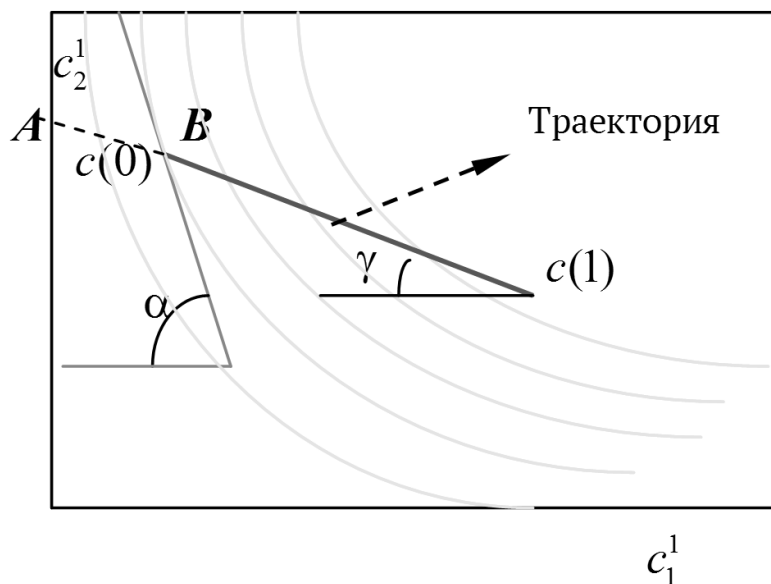
Область *B* между функцией резервной цены и линией реаллокации (горизонтальная линия) на рисунке точно представляет излишек потребителя $CS^1(0,1)$ от движения из состояния $c(0)$ в состояние $c(1)$: $-6 + (111 / 11) \ln (15 / 4)$. Область *A* представляет собой точный излишек потребителя или выигрыш от перемещения из точки *A* на левой границе ящика Эджуорта в состояние $c(0)$ (на *рис. 1* это является перемещением от точки *A* в точку *B* на левом расширении траектории).

Сумма областей *A* и *B* представляет собой совокупный выигрыш или излишек потребителя от движения из точки на левой границе ящика Эджуорта в распределение $c(1)$. Даже несмотря на то, что предпочтения потребителей не квазилинейны, области или площади между кривой резервной цены и кривой или линией реаллокации показывают не приблизительное, но точное кардиналистское представление изменения полезности человека. На *рис. 1, 2*, выигрышное перемещение потребителя не закончено: он еще может извлечь дополнительную пользу или излишек, если продолжит движение по траектории, пока коэффициент реаллокации не будет равен тангенсу угла наклона его кривой безразличия. Функция резервной цены есть обратная обобщенная функция спроса, поскольку эта резервная цена является здесь функцией исключительно потребления первого товара.

Подводя итоги, можно отметить, что индивидуальный излишек потребителя корректно представляет строго монотонные предпочтения потребителя в ящике Эджуорта. Вместо ограничения на допустимое множество предпочтений мы вводим ограничения на допустимое множество траекторий (параметризаций): для подмножества монотонных и слабо монотонных траекторий индивидуальный излишек потребителя точно представляет изменение в некоторой функции полезности в единицах товара-измерителя. Мы построили излишек потребителя в ящике Эджуорта и показали, как геометрически он может быть представлен для примера предпочтений Кобба – Дугласа: как область, ограниченная сверху кривой резервной цены, и снизу линией (кривой) реаллокации.

Рисунок 1
Траектория в ящике Эджуорта

Figure 1
Trajectory in the Edgeworth Box

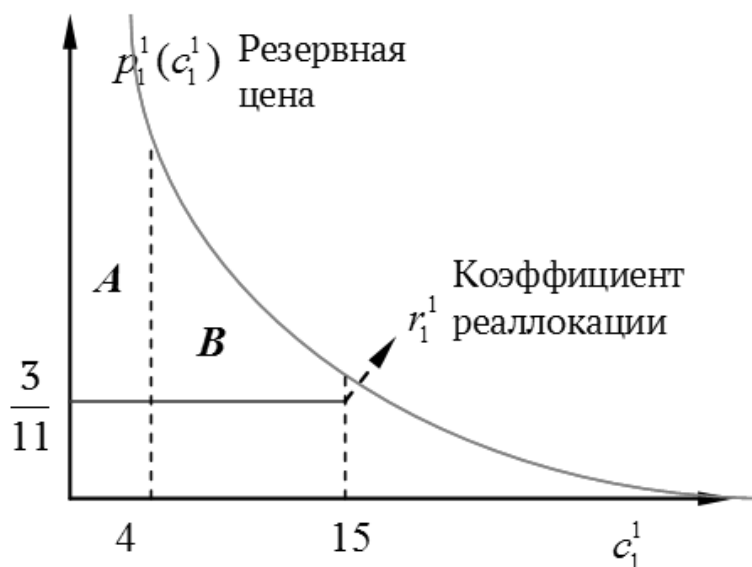


Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Рисунок 2
Излишек потребителя в ящике Эджуорта

Figure 2
Consumer surplus in the Edgeworth Box



Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Список литературы

1. *Dupuit J.* On the Measurement of Public Works. In: Kenneth J. Arrow and Tibor Scitovsky (eds.) *Readings in Welfare Economics*. Homewood, 1969, pp. 255–283.
2. *Marshall A.* *Principles of Economics*, vol. I. London and New York, Macmillan and Co., 1890, 754 p.
3. *Samuelson P.A.* Constancy of the Marginal Utility of Income. In: Oscar Lange et al. (eds). *Studies in Mathematical Economics and Econometrics. In Memory of Henry Schultz*. Chicago, 1942, pp. 75–91.
4. *Hicks J.R.* The Foundations of Welfare Economics. *The Economic Journal*, 1939, vol. 49, iss. 196, pp. 696–712. URL: <https://doi.org/10.2307/2225023>
5. *Hicks J.R.* Consumers' Surplus and Index-Numbers. *The Review of Economic Studies*, 1942, vol. 9, iss. 2, pp. 126–137. URL: <https://doi.org/10.2307/2967665>
6. *Chipman J.S., Moore J.* The Scope of Consumer' Surplus Arguments. In: A.M. Tang et al. (eds). *Evolution, Welfare and Time in Economics: Essays in Honor of Nikolas Reorgescu-Roegen*. Lexington, Health-Lexington Books, 1976, pp. 69–123.
7. *Chipman J.S., Moore J.* Compensating Variation, Consumer's Surplus, and Welfare. *The American Economic Review*, 1980, vol. 70, iss. 5, pp. 933–949.
8. *Slivinski A.* The Normative Characterization of Aggregate Consumers' Surplus Measures. *International Economic Review*, 1987, vol. 28, iss. 3, pp. 559–581. URL: <https://doi.org/10.2307/2526567>
9. *Blackorby C., Donaldson D.* Market Demand Curves and Dupuit-Marshall Consumers' Surpluses: A General Equilibrium Analysis. *Mathematical Social Sciences*, 1999, vol. 37, iss. 2, pp. 139–163. URL: [http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165-4896\(98\)00022-5](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165-4896(98)00022-5)
10. *Москальонов С.А.* Маршаллианский излишек потребителя и современная неоклассическая теория общественного благосостояния // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Общественные науки. 2007. № 1. С. 53–62. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/marshallianskiy-izlishek-potrebitelya-i-sovremennaya-neoklassicheskaya-teoriya-obschestvennogo-blagosostoyaniya>
11. *Москальонов С.А.* Как можно измерить общественное благосостояние? // Модернизация экономики и общественное развитие: в 3 кн. Кн. 3. М.: ГУ ВШЭ, 2007. С. 301–312.
12. *Silberberg E.* Duality and the Many Consumer's Surpluses. *The American Economic Review*, 1972, vol. 62, iss. 5, pp. 942–952. URL: <https://www.jstor.org/stable/1815211>

13. Burns M.E. A Note on The Concept and Measure of Consumer's Surplus. *The American Economic Review*, 1973, vol. 63, pp. 335–344.
URL: <https://www.jstor.org/stable/1914365>
14. Zajac E.E. Dupuit-Marshall Consumers' Surplus, Utility, and Revealed Preference. *Journal of Economic Theory*, 1979, vol. 20, iss. 2, pp. 260–270.
URL: [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(79\)90074-7](https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90074-7)
15. Dale O. Stahl II. A Note on the Consumer Surplus Path-of-Integration Problem. *Economica*, 1983, vol. 50, iss. 197, pp. 95–98. URL: <https://doi.org/10.2307/2554125>
16. Negishi T. The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article. *Econometrica*, 1962, vol. 30, iss. 4, pp. 635–669. URL: <https://doi.org/10.2307/1909319>
17. Uzawa H. On the Stability of Edgeworth' Barter Process. *International Economic Review*, 1962, vol. 3, iss. 2, pp. 218–232. URL: <https://doi.org/10.2307/2525426>

Информация о конфликте интересов

Я, автор данной статьи, со всей ответственностью заявляю о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи. Настоящее заявление относится к проведению научной работы, сбору и обработке данных, написанию и подготовке статьи, принятию решения о публикации рукописи.

pISSN 2073-039X
eISSN 2311-8725

Mathematical Methods and Models

INDIVIDUAL CONSUMER SURPLUS IN THE EDGEWORTH BOX

Sergei A. MOSKAL'ONOV

Ulyanovsk State University (USU),
Ulyanovsk, Russian Federation
moskalionov@yahoo.com
<http://orcid.org/0000-0002-8681-2338>

Article history:

Article No. 501/2021
Received 6 Sept 2021
Received in revised form
17 September 2021
Accepted 30 Sept 2021
Available online
29 November 2021

JEL classification: D11,
D61

Keywords: consumer
surplus, Edgeworth Box,
individual welfare, utility
function

Abstract

Subject. The consumer surplus conception is an important part of the modern microeconomic theory at the introductory and intermediate levels. Consumer surplus measures the change in the consumer's real welfare. The article addresses the peculiarities of generation and the main property of the generalized individual consumer surplus, using the Edgeworth Box case.

Objectives. The purpose is to find the main property of individual consumer surplus in the Edgeworth Box economy.

Methods. The study draws on methods of logical and mathematical analysis. The generalized consumer surplus is correctly constructed, using the mathematical theory of curve integrals of the second type (the theory of line integrals in the Western mathematics).

Results. The generalized individual consumer surplus is defined through the respective curve integral along some admissible trajectory in the simple exchange economy (Edgeworth Box). The paper also introduces the notion of the marginal individual consumer surplus, and demonstrates that consumer surplus is a correct individual welfare measure in the Edgeworth Box, and that consumer surplus is zero along any given indifference curve. I consider the numerical example of individual surplus calculation and presentation in the Edgeworth Box.

Conclusions. The generalized individual consumer surplus is a correct measure of consumer's utility change along monotone (weakly monotone) trajectories in the Edgeworth Box. Geometrically, the consumer surplus is presented as an area limited by the reservation price curve from the top and by the reallocation line (curve) from the bottom.

© Publishing house FINANCE and CREDIT, 2021

Please cite this article as: Moskal'onov S.A. Individual Consumer Surplus in the Edgeworth Box. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2021, vol. 20, iss. 11, pp. 2151–2167.
<https://doi.org/10.24891/ea.20.11.2151>

Acknowledgments

The research was financed by the grants of the Economics Education and Research Consortium, projects №№ R03-1421, R04-0251.

I am deeply grateful to Richard ERICSON, Professor, V.M. POLTEROVICH, Academician, Doctor of Economics, S.V. ARZHENOVSKII, Doctor of Economics, S.V. SAVVATEEV, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, V.K. GORBUNOV,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, K.I. SONIN, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, A.E. ETKIN, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, S.G. KARAKOZOV, Candidate of Economic Sciences, S.Yu. KOVALEV, Professor, and Ju JIANDONG, Professor, for their valuable comments and recommendations.

References

1. Dupuit J. On the Measurement of Public Works. In: Kenneth J. Arrow and Tibor Scitovsky (eds.) *Readings in Welfare Economics*. Homewood, 1969, pp. 255–283.
2. Marshall A. *Principles of Economics*, vol. I. London and New York, Macmillan and Co., 1890, 754 p.
3. Samuelson P.A. Constancy of the Marginal Utility of Income. In: Oscar Lange et al. (eds). *Studies in Mathematical Economics and Econometrics. In Memory of Henry Schultz*. Chicago, 1942, pp. 75–91.
4. Hicks J.R. The Foundations of Welfare Economics. *The Economic Journal*, 1939, vol. 49, iss. 196, pp. 696–712. URL: <https://doi.org/10.2307/2225023>
5. Hicks J.R. Consumers' Surplus and Index-Numbers. *The Review of Economic Studies*, 1942, vol. 9, iss. 2, pp. 126–137. URL: <https://doi.org/10.2307/2967665>
6. Chipman J.S., Moore J. The Scope of Consumer' Surplus Arguments. In: A.M. Tang et al. (eds) *Evolution, Welfare and Time in Economics: Essays in Honor of Nikolas Reorgescu-Roegen*. Lexington, Health-Lexington Books, 1976, pp. 69–123.
7. Chipman J.S., Moore J. Compensating Variation, Consumer's Surplus, and Welfare. *The American Economic Review*, 1980, vol. 70, iss. 5, pp. 933–949.
8. Slivinski A. The Normative Characterization of Aggregate Consumers' Surplus Measures. *International Economic Review*, 1987, vol. 28, iss. 3, pp. 559–581. URL: <https://doi.org/10.2307/2526567>
9. Blackorby C., Donaldson D. Market Demand Curves and Dupuit-Marshall Consumers' Surpluses: A General Equilibrium Analysis. *Mathematical Social Sciences*, 1999, vol. 37, iss. 2, pp. 139–163. URL: [http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165-4896\(98\)00022-5](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165-4896(98)00022-5)
10. Moskal'onov S.A. [Marshallian Consumer Surplus and Modern Neoclassical Theory of Social Welfare]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Obshchestvennye nauki = University Proceedings. Volga Region. Social Sciences*, 2007, no. 1, pp. 53–62. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/marshallianskiy-izlishek-potrebitelya-i-sovremennaya-neoklassicheskaya-teoriya-obshchestvennogo-blagosostoyaniya> (In Russ.)

11. Moskal'onov S.A. *Kak mozhno izmerit' obshchestvennoe blagosostoyanie? V kn.: Modernizatsiya ekonomiki i obshchestvennoe razvitie: v 3 kn. Kn. 3* [How can we measure the social welfare? In: Modernization of economy and social development: In 3 books. Book 3]. Moscow, SU HSE Publ., 2007, pp. 301–312.
12. Silberberg E. Duality and the Many Consumer's Surpluses. *The American Economic Review*, 1972, vol. 62, iss. 5, pp. 942–952. URL: <https://www.jstor.org/stable/1815211>
13. Burns M.E. A Note on The Concept and Measure of Consumer's Surplus. *The American Economic Review*, 1973, vol. 63, iss. 3, pp. 335–344. URL: <https://www.jstor.org/stable/1914365>
14. Zajac E.E. Dupuit-Marshall Consumers' Surplus, Utility, and Revealed Preference. *Journal of Economic Theory*, 1979, vol. 20, iss. 2, pp. 260–270. URL: [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(79\)90074-7](https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90074-7)
15. Dale O. Stahl II. A Note on the Consumer Surplus Path-of-Integration Problem. *Economica*, 1983, vol. 50, iss. 197, pp. 95–98. URL: <https://doi.org/10.2307/2554125>
16. Negishi T. The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article. *Econometrica*, 1962, vol. 30, iss. 4, pp. 635–669. URL: <https://doi.org/10.2307/1909319>
17. Uzawa H. On the Stability of Edgeworth' Barter Process. *International Economic Review*, 1962, vol. 3, iss. 2, pp. 218–232. URL: <https://doi.org/10.2307/2525426>

Conflict-of-interest notification

I, the author of this article, bindingly and explicitly declare of the partial and total lack of actual or potential conflict of interest with any other third party whatsoever, which may arise as a result of the publication of this article. This statement relates to the study, data collection and interpretation, writing and preparation of the article, and the decision to submit the manuscript for publication.