

МЕЖОТРАСЛЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ*

Евгений Львович ТОРОПЦЕВ^а, Александр Сергеевич МАРАХОВСКИЙ^б,
Рамзия Ризаевна ДУЖИНСКИ^с

^а доктор экономических наук, профессор кафедры бизнес-информатики,
Северо-Кавказский федеральный университет (СКФУ), Ставрополь, Российская Федерация
eltoroptsev@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0002-4036-6002>
SPIN-код: 7087-1760

^б доктор экономических наук, профессор кафедры экономики, финансов и права,
Филиал Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова в Пятигорске,
Пятигорск, Российская Федерация
marahov@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2248-8425>
SPIN-код: 5356-5570

^с доктор психологических наук, профессор, Колледж гуманитарных и естественных наук,
Университет Нэшнл Льюис, Чикаго, Соединенные Штаты Америки
ramzia@aol.com
ORCID: отсутствует
SPIN-код: отсутствует

* Ответственный автор

История статьи:

Рег. № 13/2020
Получена 14.01.2020
Получена в доработанном
виде 31.01.2020
Одобрена 13.02.2020
Доступна онлайн
30.03.2020

УДК 330.366
JEL: B41, C02, C61, C68

Ключевые слова:

переходные процессы,
интегрирование,
устойчивость,
экономический рост

Аннотация

Предмет. Структурные переходные процессы в макроэкономике.

Цели. Представление авторской концепции и математического обеспечения исследования структурных переходных процессов в макроэкономике. Динамический межотраслевой баланс позволяет формализовать проблему в виде задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Методология. Компонентами методологии при изложении материала были приняты основы межотраслевого и численного анализа и моделирования линейных или линеаризованных динамических систем, интегральные критерии системной динамики, устойчивости и качества переходных процессов. В совокупности с методологией анализа собственных динамических свойств экономических систем, которые решают те же задачи устойчивости, но уже на основе алгебраических методов и критериев, предлагаемое интегрирование позволяет однозначно оценивать структурную готовность экономики к расширенному воспроизводству. Такое воспроизводство характеризуется определенной степенью экономического роста, возможностями смещения текущей динамики в сторону бесконечно оптимальных или магистральных траекторий.

Результаты. Предложены методы математического обеспечения для численного исследования проблемы устойчивости и структурной динамики макроэкономике. Эти методы ориентированы на интегрирование высокоразмерных балансовых моделей и интегральные критерии качества переходных процессов в экономике. Исследование выявило преимущества вычисления матричной экспоненты и ее интеграла в задачах анализа и прогнозирования перед другими численными методами. Предлагаемый метод позволяет эффективно построить разностную схему для интегрирования с любым шагом наблюдения решения. При этом рабочий шаг интегрирования генерируется в алгоритме автоматически в зависимости от динамики изменения валовых выпусков.

Выводы. Предложен вариант анализа переходных процессов в макроэкономике, не имеющий аналогов в экономических исследованиях и предназначенный для разработки и оценки результатов реализуемой экономической политики.

© Издательский дом ФИНАНСЫ и КРЕДИТ, 2020

Для цитирования: Торопцев Е.Л., Мараховский А.С., Дужински Р.Р. Межотраслевое моделирование переходных процессов // *Экономический анализ: теория и практика*. – 2020. – Т. 19, № 3. – С. 564 – 585.
<https://doi.org/10.24891/ea.19.3.564>

Переходным процессам [1, 2] и экономической динамике [3, 4] посвящены многочисленные исследования отечественных и зарубежных ученых. Результаты этих исследований давно публикуются не только на страницах периодической печати [5, 6], но и имеют монографические обобщения [7, 8], им посвящены диссертации, они содержатся в вузовских учебниках по экономике. Представленный набор ссылок содержит примеры и подходы к анализу переходных процессов в экономике и, конечно же, далек от претензий на полноту. На самом деле в экономике данные процессы протекают непрерывно как в связи с различного рода реформами (тут библиографический список быстро устремился бы к бесконечности), так и в связи с тем, что экономические системы по своей природе являются неравновесными [9, 10].

Структура экономических систем также пребывает в перманентном переходном процессе, «осваивая» результаты научно-технического прогресса через совершенство технологий [11], расширение номенклатуры и качества производимых товаров и услуг [12], внедрение новых форм управления и организации производства [13]. Для визуализации и анализа структурных переходных процессов необходимо использование структурных моделей экономики, в ряду которых бесспорным фаворитом является динамический межотраслевой баланс (МОБ), формализованный в виде задачи Коши для системы дифференциальных и алгебраических уравнений вида

$$(E - A)X(t) - BpX(p) = Y(t), X(0) = X_0, \quad (1)$$

где E – единичная матрица;

A – матрица коэффициентов прямых материальных затрат;

$X(t)$ – вектор валовых выпусков по видам экономической деятельности (ВЭД);

B – матрица коэффициентов приростных фондоемкостей (применение курсива объяснено далее);

$p = d / dt$ – символ дифференцирования по времени;

$BpX(p)$ – вектор, характеризующий динамику накопления/сокращения всех видов «капитала» в разрезе ВЭД;

$Y(t)$ – вектор конечного спроса (потребления);

Приписка «и алгебраических» сделана для того случая, когда матрица B содержит нулевые строки.

Уравнение (1) вышло из-под пера В.В. Леонтьева в 1952 г., а современному российскому читателю известно, скорее всего, со стр. 69 его книги «Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика» [14]. Там же охарактеризованы матрицы и векторы, входящие в уравнение (1). И, несмотря на то, что сам автор на той же странице сообщает о наличии матрицы B размерности (100×100) для американской экономики, ни советская, ни российская статистика никогда не занимались ее разработкой для своей экономики [15].

Это обстоятельство делало невозможным непосредственную оцифровку модели (1) и отнесение ее к семейству вычислимых, то есть практических моделей. Разработка B давала бы возможность обращаться к численному анализу задачи Коши (или краевой задачи Коши) для обыкновенных дифференциальных уравнений. Об этой задаче современные методы вычислительной математики, реализованные в вычислительных

* Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ. Грант № 20-010-00084А «Математическое моделирование структурной устойчивости и макроэкономической динамики».

математических средах, можно сказать, знают все. То есть исследователю достаточно задать начальные/граничные условия и запустить процесс интегрирования.

Опыт наших расчетов, элементы которого графически представлены на *рис. 1*, позволяет утверждать, что модель (1) обеспечивает возможность прогнозирования валовых выпусков по ВЭД на среднесрочную перспективу с точностью до 10%. Это даже с запасом. С учетом всех возможных источников ошибок (от несоответствия модели реальной экономике, от ошибок в данных статистики, от погрешности численного метода, от погрешностей округлений в компьютерных расчетах) такой результат следует признать удовлетворительным.

На *рис. 1* представлены данные Росстата по пяти разделам выбранных нами ВЭД в номинальном исчислении. Примененная аппроксимация на разгонном участке прогнозирования отображает монотонный рост номинального валового производства в России при рассмотрении его динамики от года к году. При этом помесечная детализация выпуска лучше, чем погодная демонстрирует колебательные компоненты движения. Это тоже регистрируют данные Росстата. Их воспроизведение возможно на основе модели (1), только для этого нужна ее актуальная оцифровка. Она представляет собой сложный итерационный процесс, требующий калибровки модели на каждой итерации. Отметим, что многочисленные прикладные межотраслевые исследования позволяют говорить о сохранении актуальности оцифровки модели на среднесрочных временных горизонтах в 3–5 лет в подавляющем большинстве случаев. Часто оцифровка остается актуальной и на более длинных временных горизонтах. Демонстрируемая на разгонном участке со скважностью в 1 год гладкость изменения данных естественным образом сохраняется и на горизонте прогнозирования, начинающемся с 2018 г. В качестве начальных условий X_0 выбран вектор валового выпуска за 2011 г.

Представленные на *рис. 1* зависимости содержат не только результаты прогнозирования, но и используются для оцифровки нашей модели. Модель непрерывна, поэтому позволяет определять валовые выпуски для любого значения t .

Кроме того, на основе модели (1) удобно проводить анализ и решать задачи оптимизации собственных (внутренних, структурных) динамических свойств (СДС) экономики. Тем самым, например, моделируются результаты инвестиционных, инновационных и иных усилий, предпринимаемых в отношении исследуемой экономики. Системная значимость и техника вычислений показателей СДС достаточно подробно представлены нами в работе [16]. Они адресованы специалистам в области экономической кибернетики.

Обратим внимание на то, что по данным, представленным на *рис. 1*, и при использовании стандартных методов прогнозирования временных рядов, можно получить только инерционный прогноз с той или иной динамикой ухода графиков вверх. В самом деле данные, демонстрирующие монотонную динамику, приводят к столь же монотонным прогнозам – нет иной информации. Визуализировать колебательные составляющие движения, обусловленные структурными свойствами экономики, позволяют вычисляемые показатели СДС, а также сокращение лага представления информации по данным Росстата. Если модель (1) привести к нормальной форме Коши, а в спектре ее матрицы состояния прямым расчетом обнаружить комплексно сопряженные пары, то интегрирование (1) будет визуализировать колебания, позволит оценивать их влияние на среднесрочную экономическую перспективу. В целом же анализ обсуждаемой модели численно оценивает ее структурную готовность (или неготовность) к расширенному воспроизводству (то есть к экономическому росту), а также позволяет решать широкий спектр задач колебательной и аperiodической

статической устойчивости экономики как системы.

Интегрирование модели (1) и отображение результатов на графике ничего не говорит о качестве наблюдаемого роста. Оптимален ли он, например, в смысле своей принадлежности к конусу магистральных траекторий? Сбалансированы ли представленные пропорции роста или такая сбалансированность отсутствует? Последнее означает рост ради роста, «бесхозное» отношение к нему со стороны контура управления, гарантирует скорое нарастание всякого рода перекосов и отставаний, кризисных явлений с последующим формированием всех негативных последствий. Только нахождение экономической динамики на луче Неймана позволит через заранее заданное время сойти с этой магистрали для достижения поставленных целей типа минимизации затрат, максимизации прибыли и полезности от потребления, повышения уровня благосостояния населения и так далее в смысле продвижения к конкурентному равновесию при более благоприятных условиях, чем в прошлом периоде нахождения на магистрали.

Затронутый спектр проблем вкупе с задачами оптимизации поддается анализу на основе изложенных далее методов интегрирования модели (1) вместе с исчислением показателей СДС. Различные режимы и условия экономического роста полностью определяются СДС замкнутой по потреблению модели (1) и контролируются пропорциями собственных векторов. Возможность анализа динамических свойств модели позволяет рассматривать экономические системы в движении, определяя и прогнозируя траектории этого движения в будущем.

Теперь о курсиве при описании модели (1). Указанное после формулы (1) пояснение названия матрицы B традиционно, но не вполне корректно. Коэффициент приростной фондоемкости – безразмерная величина. А если припомнить международную систему единиц физических величин СИ и проверить

модель (1) по размерности, то нетрудно видеть, что элементы матрицы B имеют размерность времени. Здесь это, возможно, звучит неожиданно, но если обратить внимание на уравнение инерционного звена (из теории автоматического управления, теоретической механики и иных дисциплин), то перед производной в качестве множителя увидим постоянную времени этого звена. А если пойти в сторону экономики, то обнаружим, что «Экономико-математический словарь» Л.И. Лопатникова сообщает, что коэффициент приростной фондоемкости характеризует инерцию экономической системы. Характеризуют, но не тождественно равны инерции – это важно. Это прямо указывает на то, что элементы матрицы B являются собой характеристики межотраслевых инерционностей, хотя численные значения межотраслевых постоянных времени зависят от всех параметров модели. Это легко показать на примере одноотраслевой модели (как у Р. Солоу). Это позволяет с новой точки зрения исследовать проблему инерционностей экономических систем и получить для нее инструментальные методы численного анализа. При этом в фокусе внимания надо держать то, что структурные инерционности отвечают за качество переходных процессов, в том числе за экономический рост и системную устойчивость экономики. Обычно же используются разностные аналоги модели (1) при $\Delta t = 1$, то есть одному году. Тогда элементы матрицы B численно равны среднегодовым приростным фондоемкостям.

Опыт расчетов переходных процессов позволяет выделить три типа экономических систем, существенно отличающихся своими динамическими свойствами. На *рис. 2–4* показаны различные виды переходных процессов в зависимости от СДС моделей экономических систем.

Переходные процессы, показанные на *рис. 2*, демонстрируют спад валового производства по всем ВЭД. Этот спад в замкнутой консервативной системе достигает нулевой

отметки, что в классическом понимании свидетельствует об устойчивости моделируемого объекта.

Такое идеализированное разрушение макросистемы является процессом устойчивым и легко достижимым ввиду отсутствия сил, препятствующих этому процессу. С математической точки зрения СДС характеризуются отрицательным спектром собственных чисел, который приводит траектории к нулевой отметке (к остановке производства) вне зависимости от собственных векторов. Российская экономика пребывала на траекториях такого «развития» в 1990-е гг. В данном случае простым перераспределением сокращающихся ресурсов между экономическими агентами внутри системы не удастся вернуть ее на траекторию роста, такой возврат связан с инвестиционными потоками извне. Эти инвестиции, как внешние воздействия на систему, должны быть приложены в соответствии с определенными пропорциями, иначе могут возникнуть эффекты и явления, суть которых показана на *рис. 3*.

Экономическая ситуация, в которой возможен рост выпусков одних ВЭД и спад других, описывается знакопеременным спектром собственных чисел, их слабой наблюдаемостью и, соответственно, управляемостью от различных воздействий. При этом невозможно сопоставить количество отрицательных собственных чисел и число ВЭД, снижающих валовое производство. Сложные взаимодействия различных ВЭД внутри многосвязной экономики могут приводить к различным эффектам, результатом которых является, например, рост производства одних отраслей за счет других. Число собственных значений с отрицательной вещественной частью в общем случае не равно числу ВЭД, снижающих производство. Первое может быть как больше, так и меньше другого. Надо только иметь в виду, что наличие хотя бы одного отрицательного собственного числа всегда будет формировать такие структурные динамические свойства

экономики, которые могут обусловить хотя бы временное снижение выпуска хотя бы одной отрасли.

Наконец, рассмотрим модели макроэкономических систем, у которых весь спектр собственных чисел матриц состояния положителен. СДС таких систем обеспечивают постоянный рост валового производства (*рис. 4*). В том случае, если этот рост является пропорциональным в соответствии с формулой $V1 / V2 = V3 / V4$, то такой рост называется магистральным или сбалансированным.

Соответствующие нашей теме исследования классиков мировой науки, начиная с Д. фон Неймана и П. Самуэльсона, по существу, сводились к калибровке параметров динамического МОБ до получения магистрали в ее переходных процессах, тогда экономика будет постоянно растущей с определенными пропорциями.

Имеется возможность моделировать ситуации с произвольными пропорциями в экономическом росте. На практике этот процесс определяется расстановкой приоритетов в контуре управления по отношению к различным отраслям, являющимся, к примеру, локомотивными для других и донорами для бюджета. Для нашей страны – это добыча полезных ископаемых, прежде всего углеводородов, доля которых в ВВП хоть и уменьшается за последние годы, но все равно остается определяющей. Отметим, что модель (1) всегда можно настроить для анализа как действующего, так и желаемого режима функционирования экономики.

С точки зрения теории устойчивости А.М. Ляпунова процесс постоянного и бесконечного роста является неустойчивым, поэтому в технических системах всегда стремились к статической устойчивости, критерием которой является полностью отрицательный спектр собственных чисел. Именно для устойчивых систем разрабатывался математический аппарат

оптимального управления автоматизированными системами, которые, возможно, являются подсистемами более сложных технических систем.

Надо иметь в виду, что мы рассматриваем среднесрочные временные горизонты в 3–5 лет, когда линейность модели сохраняется. Конечно, при $t \rightarrow \infty$ достаточно одного действительного положительного собственного числа, чтобы после затухания всех других составляющих движения выйти на траекторию роста. Только это в теории – ведь сохранение линейности и иной адекватности модели в долгосрочном периоде не гарантировано.

Добиться устойчивого роста экономики даже в модельной ситуации гораздо сложнее, чем выполнить условия устойчивости в технических системах. Например, интегральные критерии оптимального управления не работают в условиях математической сингулярности, которая выявляется на бесконечном росте. Помимо этой и других трудностей надо подчеркнуть, что в отношении оцифровки динамических МОБ (1) исторически, как минимум в России, сложилось следующее представление.

По сложившейся традиции в научном сообществе матрица B автоматически считается вырожденной. Давно никто не ставит под сомнение этот «факт» просто потому, что он большинству стал известным со студенческой скамьи. Ненулевые строки B связываются с так называемыми фондосоздающими отраслями. Значит, только те ВЭД, которые связаны со строительством и машиностроением, заслуживают ненулевых строк в B ? А иные валовые выпуски тогда неинтегрируемы и могут меняться скачком? Они безынерционны? Если фондообразующие ВЭД интегрируемы, то их выпуски описываются дифференциальными уравнениями в (1). Тогда прочим ВЭД соответствуют алгебраические уравнения в той же модели? Это вряд ли. Многолетние наблюдения за динамикой вектора $X(t)$

позволяют практически исключить скачкообразное поведение его компонент не только в совсем ближнесрочных периодах, но и на горизонтах от года к году. Даже в периоды кризисов, внезапных внутренних и внешних изменений условий функционирования экономики компоненты валовых выпусков $X(t)$ не меняются скачком, то есть они интегрируемы с некоторыми инерционностями – ненулевыми строчками в матрице B . Даже объявляемые и поддерживаемые пакеты санкций в отношении России уже неплохо предсказываются и все меньше влияют на компоненты вектора $X(t)$. Настоящие скачкообразные изменения можно наблюдать только в составляющих монетарного сектора экономики: ряд услуг по финансовому посредничеству, цены, прежде всего на сырьевых рынках, и курсы валют – это совсем непрогнозируемые факторы.

Для оцифровки модели (1) и придания ей статуса «вычислимая» требуются данные официальной статистики, содержащиеся на сайте Росстата во вкладке «Национальные счета» – «Таблицы «затраты-выпуск». Далее потребуются таблицы формирования выпуска товаров и услуг из статистического сборника Росстата, например, «Национальные счета России в 2011–2016 годах»¹. Данные последних таблиц необходимы для расчета матрицы B . Кроме этих таблиц требуются данные о затратах труда и капитала, о соотношениях промежуточного потребления и добавленной стоимости по основным ВЭД, а также информация о доле добавленной стоимости, направляемой на формирование основного капитала. Меняется доля – меняются и технологические (межотраслевые) инерционности, наполняющие матрицу B , которая восстанавливается на основе авторской методики. Публикация этой методики вербально и в виде последовательности согласованных вычислений – наша ближайшая задача.

¹ Национальные счета России в 2011–2016 годах: стат. сб. М.: Росстат, 2017. 263 с.

Например, такая матрица за 2015 г. была представлена нами год назад².

Отметим, что в условиях отсутствия B модель (1) всегда относилась к «чисто теоретическим конструкциям» (как, например, это отмечено в работе [15], а также у всех без исключения авторитетных авторов в России), а исследователи искали и находили иные способы учета «динамизма» в моделях, различали «старые» и «новые» фонды, лаги строительства, а объемы валового накопления зависели в их моделях от будущего прироста валовых выпусков. Одним из лучших примером тому будет, пожалуй, монография [10].

Теперь обратимся к методам численного анализа модели (1), справедливо относя ее к семейству вычислимых. При этом сосредоточимся на исследовании переходных процессов и получении связанных с ними оценок качества структурной экономической динамики. Для этого перейдем к нормальной форме уравнения (1):

$$pX(t) = DX(t) + C(t), \quad X(0) = X_0. \quad (2)$$

Конструкцию $D = B^{-1}(E - A)$ назовем структурной матрицей экономики, а вектор $C(t) = -B^{-1}Y(t)$ определим как задающий возмущения и определяющий вынужденный режим функционирования экономики – возмущающий вектор.

Из курса математического анализа известно, что полный интеграл линейного неоднородного дифференциального уравнения (2) равен сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $X_{св}(t)$, называемого свободной его составляющей, и частного решения $X_b(t)$ неоднородного уравнения, получаемого при условии $t \rightarrow \infty$ и называемого вынужденным или установившимся режимом функционирования системы. Вынужденная

составляющая обусловлена структурой конечного спроса и межотраслевыми инерционностями, а весь выпуск представляет сумму

$$X(t) = X_b(t) + X_{св}(t). \quad (3)$$

Наш опыт работы с моделью (1) свидетельствует о том, что аналитическое решение задачи (2) и последующее конструирование вычислительного процесса целесообразно с использованием матричной экспоненты и ее интеграла. Тогда решение для свободных составляющих (решение соответствующего однородного уравнения, когда $C = 0$) имеет вид

$$X_{св}(t) = e^{Dt} X(0). \quad (4)$$

Решение для системы, находящейся под действием вынуждающих сил ($C \neq 0$), будет выглядеть как

$$X(t) = e^{Dt} F(t), \quad (5)$$

где $F(t)$ – некоторая, носящая промежуточный характер, матричная функция нашей модели.

Чтобы удалить из рассмотрения эту функцию, продифференцируем (5) по времени, получив:

$$\frac{dX(t)}{dt} = De^{Dt} F(t) + e^{Dt} \frac{dF(t)}{dt}, \quad (6)$$

или

$$\frac{dX(t)}{dt} = DX(t) + e^{Dt} \frac{dF(t)}{dt}. \quad (7)$$

Из выражения (7) немедленно следует, что

$$C(t) = e^{Dt} \frac{dF(t)}{dt}. \quad (8)$$

При построении вычислительного алгоритма первоначально положим, что $C = \text{const}$ и рассмотрим необходимые преобразования, а потом рассмотрим и общий случай, когда $C(t)$, то есть является функцией времени.

Если выражение (8) умножить справа и слева на матричную экспоненту e^{-Dt} , то для

² Торопцев Е.Л., Мараховский А.С., Дужински Р.Р. Равновесное и межотраслевое моделирование экономической конъюнктуры // *Экономический анализ: теория и практика*. 2019. Т. 18. Вып. 4. С. 663–680. URL: <https://doi.org/10.24891/ea.18.4.663>

удаления из дальнейшего рассмотрения функции $F(t)$ получим следующий интеграл:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t e^{-D\Theta} d\Theta C = \int_{-\infty}^0 e^{-D\Theta} C + \int_0^t e^{-D\Theta} d\Theta C. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (5), получим

$$X(t) = e^{Dt} \int_{-\infty}^0 e^{-D\Theta} d\Theta C + e^{Dt} \int_0^t e^{-D\Theta} d\Theta C, \quad (10)$$

а положив в (10) $t = 0$, определим, что вектор начальных условий

$$X(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-D\Theta} d\Theta C. \quad (11)$$

С учетом (11) выписываем формулу для аналитического решения нашей модели:

$$X(t) = e^{Dt} X(0) + \int_0^t e^{D\tau} d\tau C. \quad (12)$$

Прямое использование формулы (12) требует вычисления матричной экспоненты и ее интеграла. Мы не станем исследовать возможности, основанные на применении формулы Лагранжа – Сильвестра [17], а также на представлении этой экспоненты степенным рядом от структурной матрицы D [18]. Две указанные фундаментальные монографии, до сих пор вносящие решающий вклад в подготовку алгебраистов мирового уровня, позволяют сделать это самостоятельно.

Опыт наших исследований показывает целесообразность конструирования разностной схемы для численного интегрирования на основе следующих равномерно сходящихся рядов:

$$e^{Dt} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!}; \quad (13)$$

$$\int_0^t e^{D\tau} d\tau = tE + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k t^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (14)$$

Конструируемая разностная схема дает решения, которые на сетке с желаемым шагом H приближают в зависимости от величины H

непрерывные и точные решения (12) нашей модели. Произвольно задаваемый шаг наблюдения решения H порождает дискретный ряд значений переменной интегрирования $t_n = nH$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда для последовательно вычисляемых значений валовых выпусков $X_n = X(t_n)$, $X_{n+1} = X(t_{n+1})$ запишем уравнения:

$$X_{n+1} = e^{D(t_n+H)} X_0 + \int_0^{t_{n+1}} e^{D\tau} d\tau C; \quad (15)$$

$$X_n = e^{Dt_n} X_0 + \int_0^{t_n} e^{D\tau} d\tau C. \quad (16)$$

Теперь, если (16) умножить на e^{DH} и из (15) вычесть этот результат, то получим следующее уравнение для решения модели (2) в дискретном времени с произвольно задаваемым шагом его наблюдения H :

$$X_{n+1} = e^{DH} X_n + \int_0^H e^{D\tau} d\tau C. \quad (17)$$

Решения (17), как видим, не содержат переменной интегрирования t (t определяется номером шага H) и могут быть получены с высокой вычислительной эффективностью, если предварительно однократно вычислить экспоненту от структурной матрицы экономики и интеграл этой экспоненты. Видно также, что решения (17) для нулевой матрицы D легко получаются по квадратурной формуле средних прямоугольников, а для нулевого возмущающего вектора C точно описывают решения модели (2).

Итак, нам требуется вычислить два объекта:

$$e^{DH} \text{ и } \int_0^H e^{D\tau} d\tau. \text{ Для этого воспользуемся}$$

приемом, впервые представленным профессором Ленинградского политехнического института Ю.В. Ракитским в работе [19] и введем такой малый параметр (начальный шаг) вычислительной процедуры, как

$$h = H / 2^N, \quad (18)$$

где N – целое число, выбираемое таким образом, чтобы для определенного по (18) малого шага h вычислить e^{DH} с небольшим числом слагаемых в формуле (13).

Выбор числа N регулирует ошибку метода – ее всегда можно уменьшить до приемлемого уровня. После этого рекуррентная формула

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k \Phi_k = \Phi_k^2, \quad (19)$$

где $\Phi_k = e^{2^k Dh}$, $k = 0, 1, \dots, N$; $\Phi_0 = e^{Dh}$; $\Phi_N = e^{2^N Dh} = e^{DH}$ позволяет получить искомую экспоненту от структурной матрицы.

Аналогичная рекуррентная формула строится для интеграла от этой матричной экспоненты. Полагая

$$\Phi_k = \int_0^{2^k h} e^{D\tau} d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (20)$$

сразу из (20) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_0^{2h} e^{D\tau} d\tau = \int_0^h e^{D\tau} d\tau + \int_h^{2h} e^{D\tau} d\tau = \\ &= \int_0^h e^{D\tau} d\tau + \int_0^h e^{D\tau} d\tau e^{Dh} = \\ &= \int_0^h e^{D\tau} d\tau (E + e^{Dh}) = \Phi_0 (E + \Phi_0), \end{aligned} \quad (21)$$

а тогда, обобщая (21), получаем

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k (E + \Phi_k). \quad (22)$$

Сравнение рядов (13) и (14) позволяет видеть, что $\Phi_k = E + D\Phi_k$ и преобразовать рекуррентную формулу (22) к виду

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k (2E + D\Phi_k), \quad (23)$$

что позволяет независимо друг от друга вычислять e^{DH} и $\int_0^H e^{D\tau} d\tau$. То есть независимо вычисляются матрицы Φ_k и Φ_k .

Это позволяет записать рабочую формулу численного метода:

$$X_{n+1} = \bar{\Phi}_N X_n + \bar{\Phi}_N C, \quad (24)$$

где черточки над матрицами означают их приближенное вычисление с точностью, регулируемой выбором целого числа N и числом членов сумм в (13) и (14). Представленные рекуррентные соотношения (19), (22) или (23) позволяют последовательно наблюдать решение в точках $H, 2H, 3H, \dots$ по формуле (24).

Вместо матриц Φ_k можно рекуррентно вычислять вектор

$$\begin{aligned} g_k &= \int_0^{2^k h} e^{D\tau} d\tau C = \Phi_k C, \\ k &= 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (25)$$

что позволяет уменьшить вычислительную трудоемкость алгоритма. При размерностях МОБ более 100 дифференциальных уравнений и решении оптимизационных задач использование (25) может быть важно для современных ноутбуков. А так как матрицы Φ_k и $(E + \Phi_k)$ при умножении перестановочны, то получаем следующую рекуррентную формулу для вычисления вектора g_{k+1} :

$$g_{k+1} = (E + \Phi_k) g_k, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (26)$$

Формула (26) используется в вычислительном алгоритме вместе с (19), и тогда рабочая формула метода примет следующий вид:

$$X_{n+1} = \bar{\Phi}_N X_n + \bar{g}_N. \quad (27)$$

Если при этом выбором числа N добиться малого числа членов сумм в (13) и (14) при достаточной точности вычисления матриц Φ_0 и Φ_0 , то проблему разработки вычислительной процедуры при $C = \text{const}$ можно считать решенной.

Остановившись на вопросе точности вычислительной процедуры в нашем рассмотрении, оставим в стороне проблему устойчивости алгоритма до планируемого рассмотрения явления жесткости в динамических моделях МОБ. Именно в тех условиях функционирования, когда, например,

в монетарном секторе экономики возникают быстропереходные процессы на фоне текущих более медленных, проблема устойчивости численного анализа приобретает большое значение. Эта проблема усугубляется необходимостью оцифровки моделей и ведения расчетов на основе данных Росстата, содержащих трудно оцениваемые ошибки. Здесь будем только иметь в виду, что на основе шага наблюдения решения H будет построена таблица прогнозных значений валовых выпусков по ВЭД для набора последовательных значений переменной интегрирования t . Значит шаг H должен выбираться из условия корректного наблюдения динамики компонент вектора $X(t)$. По данным таблицы должна быть построена такая аппроксимирующая функция, которая с необходимой точностью на среднесрочном горизонте обеспечит потребности экономического анализа и управления процессом развития.

Рассмотрим, что практически дает применение рекуррентной схемы (17). Для этого положим, что вычислительный процесс построен так, как это принято в классике вычислительной математики – с использованием формулы Тейлора, которая в нашем случае обеспечивает необходимую точность интегрирования на отрезке $[0, T]$. Пусть для выполнения этого требования сгенерирован шаг h и использованы четыре члена разложения из ряда Тейлора, что дает следующую рабочую формулу:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \left(E + hD + \frac{h^2 D^2}{2} + \frac{h^3 D^3}{6} + \frac{h^4 D^4}{24} \right) X_n + \\ &+ h \left(E + \frac{hD}{2} + \frac{h^2 D^2}{6} + \frac{h^3 D^3}{24} \right) C = \\ &= \bar{\Phi}_0 X_n + \bar{\Phi}_0 C = \bar{\Phi}_0 X_n + \bar{g}_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Формула (28) представляет известный метод Рунге – Кутты 4-й степени. Подробно – с аппроксимацией решения полиномом Тейлора 4-й степени на шаге h . С другой стороны, разностное уравнение (17) порождает конкурентную с (28) схему

$$\begin{aligned} X(mH + H) &= \bar{\Phi}_N X(mH) + \bar{g}_N, \\ m &= 0, 1, \dots, H = 2^N h. \end{aligned} \quad (29)$$

Если предположить, что T/h – целое число, то метод (28) выполняет T/h умножений матрицы на вектор, а метод (29) требует выполнения только $T/H = 2^{-N} T/h$ таких умножений при обеспечении той же точности. Более того, если n – размерность модели (2), то дополнительно метод (29) реализует еще $(n-1)N$ перемножений матриц Φ_k из (19) для получения $\bar{\Phi}_N$ и столько же умножений матрицы на вектор в соответствии с (26) для формирования $\bar{g}_N$.

Представленные основные вычислительные затраты методов говорят о том, что при достаточно больших T/h , а это гарантируется при наличии быстропереходных процессов в экономике, метод (29) обладает большей вычислительной эффективностью в сравнении со стандартным методом Рунге – Кутты (28). При этом не является редким случай, когда исследователя интересует только финал интегрирования – только одна конечная точка, когда $H = T$. Ничто не мешает это сделать и применить формулу (29) только один раз. Ограничения на шаг наблюдения решения H отсутствуют – он может быть выбран произвольно, без оглядки на характер изменения составляющих вектора валовых выпусков. Требуемую точность решения обеспечивает выбор начального шага h .

Другие возможные методы интегрирования модели (2) обсуждать не станем, а вычислительный процесс по формуле (29) детализируем для возможности разработки практического алгоритма.

По заданному шагу наблюдения решения H определяется целое N так, чтобы значение $h = H / 2^N$ обеспечило необходимую точность интегрирования. Та самая «необходимая точность» достигается, если ориентироваться на неравенство из [19]:

$$h \leq \frac{k_H}{\|D\|}, \quad (30)$$

где k_H – константа;

$\|D\|$ – евклидова норма структурной матрицы.

Опыт расчетов говорит о том, что величину k_H для жестких моделей (1), (2) в связи с необходимостью прохождения так называемого пограничного слоя можно принять равной $\sim 0,1 \dots 0,2$, а для нежестких моделей эту константу можно увеличить раз в пятьдесят.

Определившись с начальным шагом h , вычисляем $\bar{\Phi}_0$, $\bar{\Phi}_0$ по формулам:

$$\bar{\Phi}_0 = e^{Dh} \approx E + Dh + \dots + \frac{D^v h^v}{v!}; \quad (31)$$

$$\bar{\Phi}_0 = \int_0^h e^{D\tau} d\tau \approx h \left(E + \frac{hD}{2} + \dots + \frac{h^{v-1} D^{v-1}}{v!} \right), \quad (32)$$

при невысоких значениях v , а можно вместо (31) и (32) использовать такие дробно-рациональные аппроксимации этих матриц, как [18]:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_0 &= E + D\bar{\Phi}_0 \approx \\ &\approx \left(E - \frac{hD}{2} + \frac{h^2 D^2}{12} \right)^{-1} \left(E + \frac{hD}{2} + \frac{h^2 D^2}{12} \right); \end{aligned} \quad (33)$$

$$\bar{\Phi}_0 = \int_0^h e^{D\tau} d\tau \approx h \left(E - \frac{hD}{2} + \frac{h^2 D^2}{12} \right)^{-1}. \quad (34)$$

Теперь вычисляем

$$\bar{g}_0 = \bar{\Phi}_0 C \approx \left(E - \frac{hD}{2} + \frac{h^2 D^2}{12} \right)^{-1} hC. \quad (35)$$

Далее по формулам (19) и (26) вычисляются $\bar{\Phi}_N$ и $\bar{g}_N$. Наконец, по формуле (29) получаем приближенное решение модели МОБ на очередном шаге наблюдения решения. Итак, группу рабочих формул метода представляют (31), (32), (19), (26), (29), упомянутые в порядке их использования.

По поводу отмеченного в отношении интегрирования динамических МОБ вида (1), (2) можно сделать, пожалуй, только одно

замечание. Оценка (30), с которой связан выбор начального шага h , может давать заниженные его значения, что приведет к критическому накоплению вычислительной погрешности. Для преодоления этого негатива надо увеличить константу k_H до значения, при котором частное (30) станет примерно равным $\left(\max_i |\lambda_i| \right)^{-1}$, где λ_i – собственные значения структурной матрицы. При этом правило Рунге позволяет провести проверку точности интегрирования модели. Для этого нужны два варианта интегрирования: с первоначально заданной величиной k_H и с величиной вдвое меньшей. Во втором случае число шагов в рекуррентных формулах (19) и (26) возрастает на единицу.

Рассмотренный алгоритм интегрирования динамических МОБ с небольшими и очевидными изменениями может применяться для решения той же задачи с переменным конечным спросом. Модель (2) примет следующий вид:

$$pX(t) = DX(t) + C(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (36)$$

Все обозначения и переменные сохраняем прежними, а для построения вычислительного алгоритма на отрезке $[t_n, t_n + H]$ компоненты вектора конечного спроса $C(t)$ примем примерно постоянными и равными $C(t_n + H/2)$. При этих предположениях модификации алгоритма выполняются проще и очевиднее всего. Временная динамика конечного спроса позволяет считать, что его значения $C(t_n + \tau)$ достаточно точно представимы степенными полиномами. Модель (36) несколько меняет вид:

$$pX(t + \tau) = DX(t_n + \tau) + C(t_n + H/2), \quad \tau \in [0, H]. \quad (37)$$

Тогда разностное уравнение (17) принимает новую форму:

$$X_{n+1} = e^{DH} X_n + \int_0^H e^{D\tau} d\tau C(t_n + H/2). \quad (38)$$

Если положить вектор $C(t)$ нулевым, то свободные составляющие (38) точно описывают решение модели (37), и при $C(t) \neq 0$ уравнение (38) дает решения X_{n+1} , приближающие решения модели (37) в точках t_{n+1} .

Требования к выбору шага наблюдения решения H очевидны – он должен выбираться в согласии с быстротой изменения вектора-функции конечного спроса $C(t)$. Здесь отметим, что прогнозирование конечного спроса представляет собой задачу, давно и успешно решаемую экономистами.

Изменения вектора $C(t_n + H/2)$ от шага к шагу необходимо учитывать в вычислительной процедуре. Поэтому если для постоянного вектора $C(t)$ строились матрица $\bar{\Phi}_N$ и вектор $\bar{g}_N$ по формулам (19) и (26) соответственно, то в данном случае последний вектор не вычисляется. Вместо него строится матрица $\bar{\Phi}_N$ по формулам (22) или (23), а рабочая формула метода принимает следующий вид:

$$X_{n+1} = \bar{\Phi}_N X_n + \bar{\Phi}_N C(t_n + H/2). \quad (39)$$

Наконец, рассмотрим нестационарную динамическую модель МОБ вида

$$pX(t) = D(t) X(t) + C(t), \quad (40)$$

которая учитывает зависимость элементов структурной матрицы D от времени. Но это можно сделать только в случае, если динамика данных элементов прогнозируема. Тогда для системы (40) учитываются следующие ограничения:

$$\begin{aligned} X(t_0) &= X_0, \|D(t) - D_n\| \leq \varepsilon_n, \\ t_n \leq t \leq t_n + H_n, D_n &= \text{const}, \end{aligned} \quad (41)$$

а соответствующее модели (40) и ограничениям (41) разностное уравнение имеет вида соответствующее модели (40) и ограничениям (41) разностное уравнение имеет вид

$$X_{n+1} = e^{D_n H_n} X_n + \int_0^{H_n} e^{D_n \tau} d\tau C(t_n + H_n/2), \quad (42)$$

позволяющий учитывать изменения всех коэффициентов на каждом шаге интегрирования.

Очевидно, что чем более детальную модель мы стремимся построить, тем больше вопросов возникает к ее оцифровке. Исследователю приходится находить компромисс между возможностями статистики исходных данных и горизонтом прогнозирования.

Разностное соотношение (42) при выполнении шагов требует гораздо большего числа арифметических операций, чем те, что были рассмотрены ранее. Это следствие необходимости многократного перемножения квадратных матриц, что по трудоемкости сравнимо с обращением матрицы методом Гаусса. Относительно недавно объем вычислений для учета переменных коэффициентов на каждом шаге интегрирования признавался непреодолимо большим. В настоящее время с этой задачей успешно справляются современные ноутбуки – проблема утратила остроту.

Экспериментальная часть нашего исследования завершается примером моделирования региональной экономики Ставропольского края с учетом вынужденной составляющей разностного уравнения (42), возникающей в процессе влияния мирового кризиса 2008–2009 гг. Это представлено на *рис. 5*.

Оцифровка модели выполнялась по авторской методике и на основе данных регионального отделения Росстата. На *рис. 5* построена одна из магистралей роста валового производства начиная с 2010 г., которая отражает вариант ее оптимального и непротиворечивого функционирования/развития/роста. Реальные факты экономической жизни нанесены крестиками и кружочками, но не на все кривые. Они по множеству причин не принадлежат конусу магистральных траекторий и проходят ниже. Ограничимся констатацией того, что ни правительство Ставропольского края, ни федеральный центр никогда не сообщали о нахождении

региональной экономики на магистрали развития. Нам не удалось обнаружить каких-либо свидетельств того, что в современной России ставилась задача сдвига экономической динамики в сторону магистральных траекторий.

В качестве выводов отметим, что нами предложены и обоснованы математические процедуры исследования структурных переходных процессов на основе модели динамического МОБ. Алгоритмы задают последовательность согласованно выполняемых вычислений, а потому могут быть легко формализованы на компьютере. Методы анализа структурной динамики,

основанные на вычислении матричной экспоненты и ее интеграла, претендуют на вхождение в состав комплекса математического обеспечения для решения задач устойчивости, экономической динамики и роста, качества переходных процессов в макроэкономике.

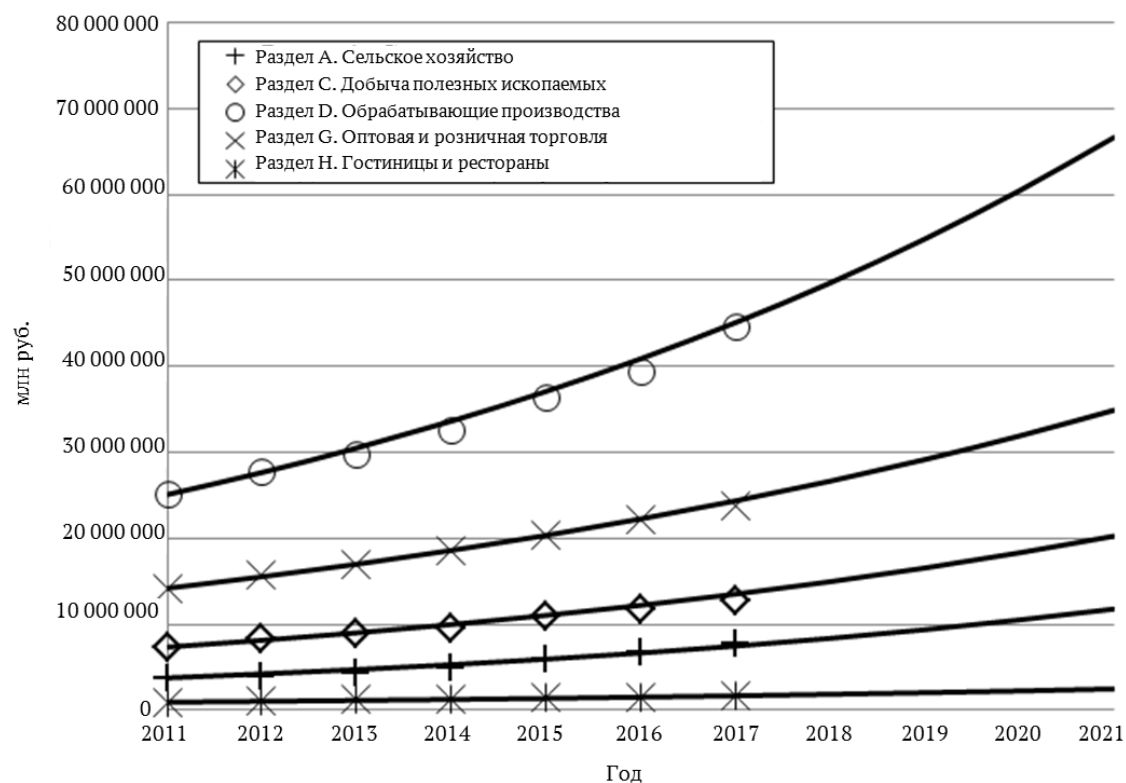
Мы старались максимально деликатно подойти к магистральным теориям в экономике, считая эту тему не своей. Читателям, интересующимся «тяжеловесными» математическими конструкциями этой теории, рекомендуем фундаментальную монографию [20].

Рисунок 1

Пример прогнозирования валового производства по ВЭД

Figure 1

An example of forecasting gross output in foreign economic activity



Источник: авторская разработка по данным Росстата

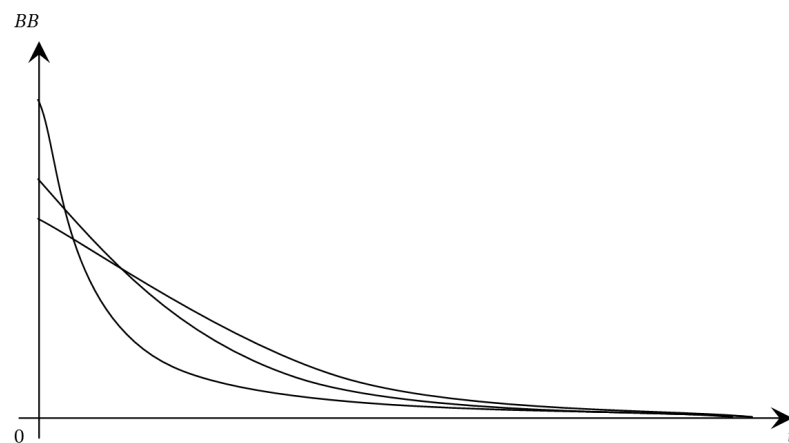
Source: Authoring, based on the Rosstat data

Рисунок 2

Спад валового производства

Figure 2

Gross output decline

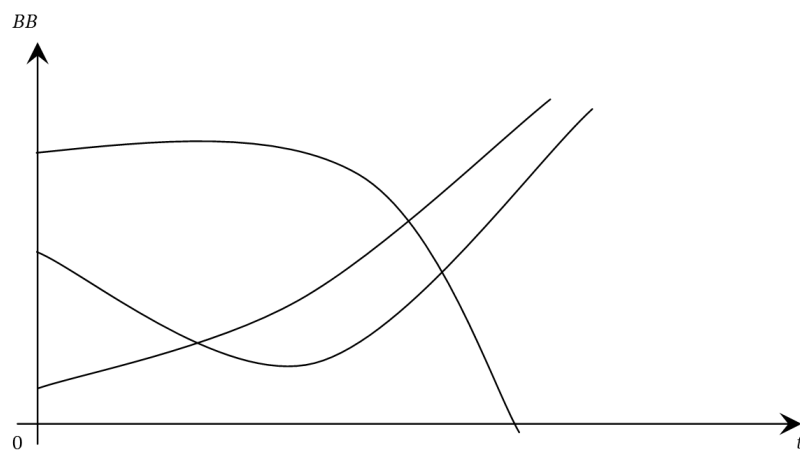


Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Рисунок 3
Рост одних и спад других ВЭД

Figure 3
Growth for some foreign economic activities and slump for other ones

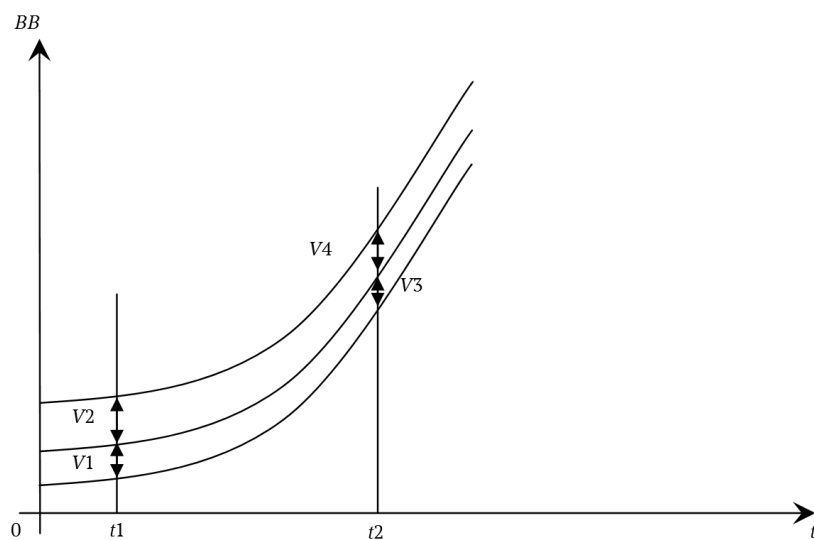


Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Рисунок 4
Магистральный рост валовых выпусков

Figure 4
Main growth of gross output



Источник: авторская разработка

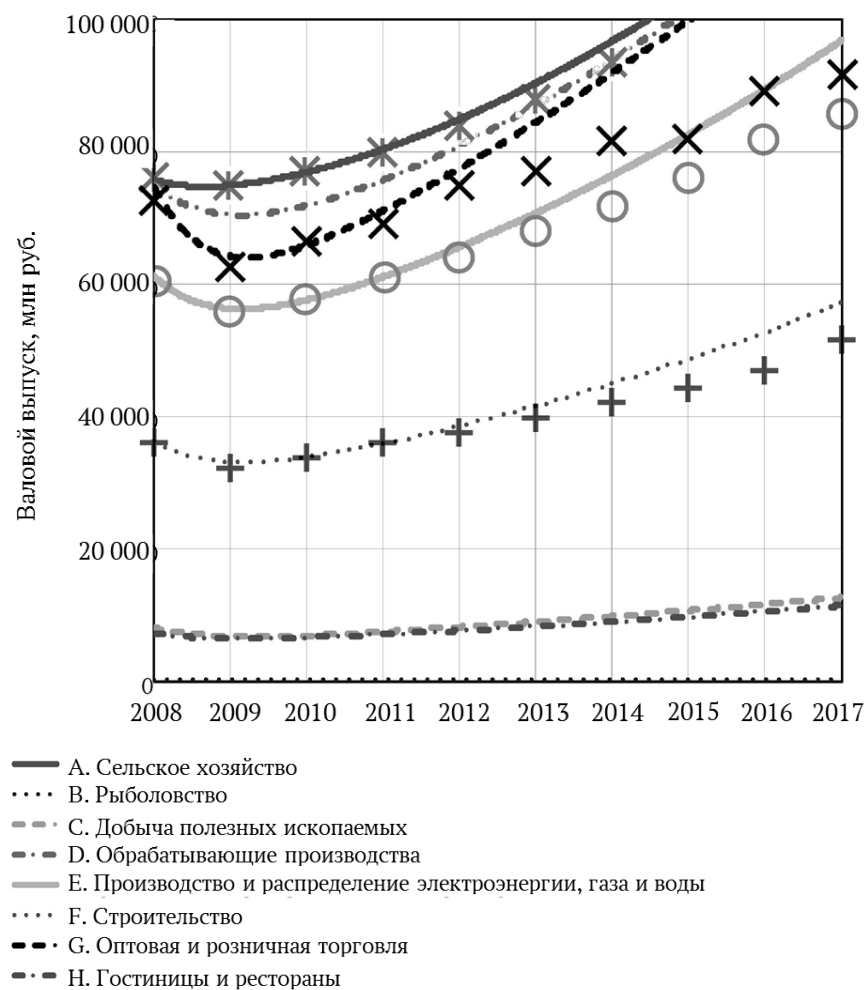
Source: Authoring

Рисунок 5

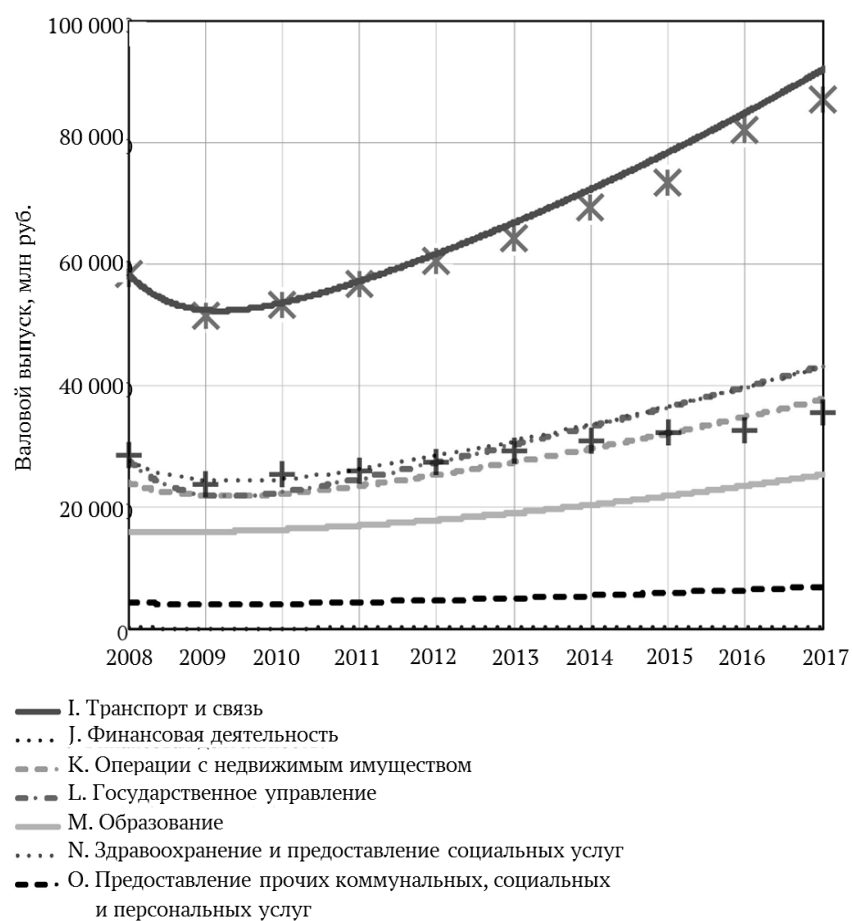
Моделирование кризиса 2008–2009 гг. на примере экономики Ставропольского края по видам экономической деятельности: *a* – А – Н; *b* – I – O

Figure 5

Simulation of the 2008–2009 crisis, the case of the economy of the Stavropol Krai by type of economic activity: *a* – А – Н; *b* – I – O



a



b

Источник: авторская разработка по данным Ставропольстата

Source: Authoring, based on the Stavropolstat data

Список литературы

1. Любушин Н.П., Бабицева Н.Э., Коньшиков А.С. Устойчивое развитие: оценка, анализ, прогнозирование // *Экономический анализ: теория и практика*. 2017. Т. 16. Вып. 12. С. 2392–2406. URL: <https://doi.org/10.24891/ea.16.12.2392>
2. Ким К.А. Переходные (трансформационные) процессы – главное условие развития экономической системы // *Вестник Российского университета дружбы народов. Сер.: Экономика*. 2013. № 4. С. 18–24. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/perehodnye-transformatsionnye-protsessy-glavnoe-uslovie-razvitiya-ekonomicheskoy-sistemy/viewer>
3. Светульников С.Г., Абдуллаев И.С. Экономическая динамика и производственные функции // *Вестник Оренбургского государственного университета*. 2009. № 5. С. 110–114. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/ekonomicheskaya-dinamika-i-proizvodstvennye-funktsii>
4. Светульников С.Г., Абдуллаев И.С. Сравнительный анализ производственных функций в моделях экономической динамики // *Известия Санкт-Петербургского университета экономики и финансов*. 2019. № 5. С. 55–66. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-proizvodstvennyh-funktsiy-v-modelyah-ekonomicheskoy-dinamiki/viewer>
5. Любушин Н.П., Бабицева Н.Э., Усачев Д.Г., Шустова М.Н. Генезис понятия «устойчивое развитие экономических систем различных иерархических уровней» // *Региональная экономика: теория и практика*. 2015. № 48. С. 2–14. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/genezis-ponyatiya-ustoychivoe-razvitie-ekonomicheskikh-sistem-razlichnyh-ierarhicheskikh-urovney/viewer>
6. Тупчиенко В.А. Научно-технический прогресс и его влияние на экономический рост // *Экономический анализ: теория и практика*. 2013. № 24. С. 33–38. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/nauchno-tehnicheskij-progress-i-ego-vliyanie-na-ekonomicheskij-rost/viewer>
7. Алмон К. Искусство экономического моделирования. М.: МАКС Пресс, 2012. 646 с.
8. Svetunkov S. *Complex-Valued Modeling in Economics and Finance*. New York, NY, Springer, 2012, 318 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5876-0>
9. Глазьев С.Ю. Экономика будущего. Есть ли у России шанс? М.: Книжный мир, 2016. 640 с.
10. Позамантур Э.И. Вычислимое общее равновесие экономики и транспорта (Транспорт в динамическом межотраслевом балансе). М.: Поли Принт Сервис, 2014. 160 с.
11. Макафи Э., Бриньолфсон Э. Машина, платформа, толпа. Наше цифровое будущее. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2019. 410 с.
12. Погосов И.А., Соколовская Е.А. Факторы долговременного экономического роста в России. М.: Институт экономики РАН, 2015. 53 с.
13. Погосов И.А. Факторы долгосрочного экономического роста: научно-технический прогресс и капиталоемкость производства // *Проблемы прогнозирования*. 2015. № 5. С. 11–24. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/factory-dolgosrochnogo-ekonomicheskogo-rosta-nauchno-tehnicheskij-progress-i-kapitaloemkost-proizvodstva/viewer>
14. Леонтьев В.В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. М.: Политическая литература, 1990. 416 с.

15. Суворов Н.В., Трещина С.В., Балашова Е.В. и др. Роль технологического фактора в развитии российской экономики: результаты прогнозно-аналитических исследований. М.: МАКС Пресс, 2015. 640 с.
16. Торопцев Е.Л., Мараховский А.С., Дужински Р.Р. Теоретические основы разработки комплекса равновесных и межотраслевых моделей // *Экономический анализ: теория и практика*. 2019. Т. 18. Вып. 3. С. 427–446. URL: <https://doi.org/10.24891/ea.18.3.427>
17. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
18. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1998. 548 с.
19. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
20. Красс И.А. Математические модели экономической динамики. М.: Советское радио, 1976. 279 с.

Информация о конфликте интересов

Мы, авторы данной статьи, со всей ответственностью заявляем о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи. Настоящее заявление относится к проведению научной работы, сбору и обработке данных, написанию и подготовке статьи, принятию решения о публикации рукописи.

INTERSECTORAL MODELING OF TRANSIENTS

Evgenii L. TOROPTSEV ^{a,*}, Aleksandr S. MARAKHOVSKII ^b, Ramziya R. DUSZYNSKI ^c^a North-Caucasus Federal University (NCFU), Stavropol, Russian Federation

eltoroptsev@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0002-4036-6002>^b Plekhanov Russian University of Economics, Pyatigorsk Branch, Pyatigorsk, Russian Federation

marahov@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0003-2248-8425>^c National Louis University, College of Arts and Sciences, Chicago, Illinois, USA

ramzia@aol.com

ORCID: not available

* Corresponding author

Article history:

Article No. 13/2020

Received 14 January 2020

Received in revised form

31 January 2020

Accepted 13 February 2020

Available online

30 March 2020

JEL classification: B41, C02,
C61, C68**Keywords:** transition process,
integration, sustainability,
economic growth**Abstract****Subject** The article considers structural transition processes in macroeconomics.**Objectives** The aim is to present our own concept and mathematical tools to study structural transitions in macroeconomics. Dynamic inter-industry balance enables to formalize the problem in the form of a Koshi task for ordinary differential equations.**Methods** The methodology components include the basics of inter-industry and numerical analysis and modeling of linear or linearized dynamic systems, integral criteria of system dynamics, stability and quality of transitional processes. We also apply a technique for analyzing the own dynamic properties of economic systems that solve the same sustainability-related challenges, but on the basis of algebraic methods and criteria.**Results** We offer methods and mathematical tools for numerical study of sustainability and structural dynamics of macroeconomics. These methods are focused on integrating high-dimensional balance models and integral criteria for the quality of transition periods in the economy. The paper unveils advantages of calculating the matrix exponential and its integral in tasks involving analysis and forecasting, over other numerical methods. The proposed method permits to effectively build a difference scheme to integrate with any step of observation of the solution. In this case, the work step of integration is generated in the algorithm automatically, depending on changes in gross output.**Conclusions** The paper presents a unique option to analyze transitional processes in macroeconomics. It is designed to develop and evaluate the results of pursued economic policy.

© Publishing house FINANCE and CREDIT, 2020

Please cite this article as: Toroptsev E.L., Marakhovskii A.S., Duszynski R.R. Intersectoral Modeling of Transients.*Economic Analysis: Theory and Practice*, 2020, vol. 19, iss. 3, pp. 564–585.<https://doi.org/10.24891/ea.19.3.564>**Acknowledgments**The article was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR), grant № 20-010-00084A, *Mathematical Modeling of Structural Stability and Macroeconomic Dynamics*.**References**

1. Lyubushin N.P., Babicheva N.E., Konyshkov A.S. [Sustainable development: Evaluation, analysis, forecasting]. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika* = *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2017, vol. 16, iss. 12, pp. 2392–2406. (In Russ.) URL: <https://doi.org/10.24891/ea.16.12.2392>

2. Kim K.A. [Transition (transformation) processes – the dominant economic system development condition]. *Vestnik Rossiiskogo universiteta družby narodov. Ser.: Ekonomika = Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Economics*, 2013, no. 4, pp. 18–24.
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/perehodnye-transformatsionnye-protsessy-glavnoe-uslovie-razvitiya-ekonomicheskoy-sistemy/viewer> (In Russ.)
3. Svetun'kov S.G., Abdullaev I.S. [Economic dynamics and industrial functions]. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta = Vestnik of the Orenburg State University*, 2009, no. 5, pp. 110–114. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/ekonomicheskaya-dinamika-i-proizvodstvennye-funktsii> (In Russ.)
4. Svetun'kov S.G., Abdullaev I.S. [Comparative analysis of production functions in models of economic dynamics]. *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo universiteta ekonomiki i finansov = Bulletin of Saint Petersburg State University of Economics*, 2019, no. 5, pp. 55–66.
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-proizvodstvennyh-funktsiy-v-modelyah-ekonomicheskoy-dinamiki/viewer> (In Russ.)
5. Lyubushin N.P., Babicheva N.E., Usachev D.G., Shustova M.N. [Genesis of the concept of sustainable development of economic systems of various hierarchical levels]. *Regional'naya ekonomika: teoriya i praktika = Regional Economics: Theory and Practice*, 2015, no. 48, pp. 2–14. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/genezis-ponyatiya-ustoychivoe-razvitie-ekonomicheskikh-sistem-razlichnyh-ierarhicheskikh-urovney/viewer> (In Russ.)
6. Tupchienko V.A. [Scientific and technological progress and its influence on economic growth]. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika = Economic Analysis: Theory and Practice*, 2013, no. 24, pp. 33–38. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/nauchno-tehnicheskii-progress-i-ego-vliyanie-na-ekonomicheskii-rost/viewer> (In Russ.)
7. Almon C. *Iskusstvo ekonomicheskogo modelirovaniya* [The Craft of Economic Modeling]. Moscow, MAKSPress Publ., 2012, 646 p.
8. Svetunkov S. *Complex-Valued Modeling in Economics and Finance*. New York, NY, Springer, 2012, 318 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5876-0>
9. Glaz'ev S.Yu. *Ekonomika budushchego. Est' li u Rossii shans?* [The economy of the future. Does Russia have a chance?] Moscow, Knizhnyi mir Publ., 2016, 640 p.
10. Pozamantir E.I. *Vychislimoe obshchee ravновесие ekonomiki i transporta (Transport v dinamicheskoy mezhotraslevom balanse)* [Computable general equilibrium of economy and transport (Transport in the dynamic interindustry balance)]. Moscow, Poli Print Servis Publ., 2014, 160 p.
11. McAfee A., Brynjolfsson E. *Mashina, platforma, tolpa. Nashe tsifrovoe budushchee* [Machine, Platform, Crowd: Harnessing Our Digital Future]. Moscow, Mann, Ivanov i Ferber Publ., 2019, 410 p.
12. Pogosov I.A., Sokolovskaya E.A. *Fakторы dolgovremennogo ekonomicheskogo rosta v Rossii* [Long-Term Economic Growth Factors in Russia]. Moscow, IE RAS Publ., 2015, 53 p.
13. Pogosov I.A. [Factors of long-term economic growth: Scientific and technical progress and capital intensity of production]. *Problemy prognozirovaniya = Problems of Forecasting*, 2015, no. 5, pp. 11–24. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/fakторы-dolgosrochnogo-ekonomicheskogo-rosta-nauchno-tehnicheskii-progress-i-kapitaloemkost-proizvodstva/viewer> (In Russ.)

14. Leont'ev V.V. *Ekonomicheskie esse. Teorii, issledovaniya, fakty i politika* [Economics essay. Theories, research, facts and politics]. Moscow, Politicheskaya literatura Publ., 1990, 416 p.
15. Suvorov N.V., Treshchina S.V., Balashova E.V. et al. *Rol' tekhnologicheskogo faktora v razvitii rossiiskoi ekonomiki: rezul'taty prognozno-analiticheskikh issledovaniy* [The role of technological factor in the Russian economy development: Results of predictive analytics]. Moscow, MAKS Press Publ., 2015, 640 p.
16. Toroptsev E.L., Marakhovskii A.S., Duzhinski R.R. [Theoretical framework for a set of equilibrium and input-output models development]. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika* = *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2019, vol. 18, iss. 3, pp. 427–446. (In Russ.)
URL: <https://doi.org/10.24891/ea.18.3.427>
17. Wilkinson J.H. *Algebraicheskaya problema sobstvennykh znachenii* [The Algebraic Eigenvalue Problem]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 564 p.
18. Golub G.H., Van Loan Ch.F. *Matrichnye vychisleniya* [Matrix Computations]. Moscow, Mir Publ., 1998, 548 p.
19. Rakitskii Yu.V., Ustinov S.M., Chernorutskii I.G. *Chislennyye metody resheniya zhestkikh sistem* [Numerical solutions for rigid systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 208 p.
20. Krass I.A. *Matematicheskie modeli ekonomicheskoi dinamiki* [Mathematical models of economic dynamics]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1976, 279 p.

Conflict-of-interest notification

We, the authors of this article, bindingly and explicitly declare of the partial and total lack of actual or potential conflict of interest with any other third party whatsoever, which may arise as a result of the publication of this article. This statement relates to the study, data collection and interpretation, writing and preparation of the article, and the decision to submit the manuscript for publication.