

**МНОГОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ
С КРАТНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТЬЮ ПОСТАВОК****Артур Александрович МИЦЕЛЬ^{а*}, Ксения Андреевна АНПИЛОГОВА^б**

^а доктор технических наук, профессор кафедры АСУ,
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР);
профессор кафедры высшей математики и математической физики,
Национальный исследовательский Томский политехнический университет (НИ ТПУ),
Томск, Российская Федерация
maa@asu.tusur.ru
<https://orcid.org/0000-0002-2624-4383>
SPIN-код: 9698-2160

^б студентка магистратуры физико-технического института,
Национальный исследовательский Томский политехнический университет (НИ ТПУ),
Томск, Российская Федерация
Kseniya.anpilogova1994@gmail.com
ORCID: отсутствует
SPIN-код: 7502-1919

* Ответственный автор

История статьи:

Reg. № 473/2018
Получена 21.06.2018
Получена в доработанном
виде 10.07.2018
Одобрена 25.11.2019
Доступна онлайн
25.12.2019

УДК 658.153
JEL: C61

Ключевые слова:

оборотный капитал,
управление запасами,
многопродуктовая модель,
оптимизация, минимизация

Аннотация

Предмет. За последние десятилетия достигнуты значительные успехи в создании различных математических моделей управления товарными и нетоварными запасами. Однако относительно недавно было показано, что этот «триумф», скорее всего, ирреален. Дело в том, что базовые предположения, заложенные в классической модели теории управления запасами – стационарность спроса, наличие «хороших» оценок вероятностных распределений, отсутствие межноменклатурной и временной корреляций – на практике, как правило, не выполняются, а если и выполняются, то весьма приближенно. Это уменьшает значения знаменательных теоретических результатов, а также нового осознания сути законов управления запасами. Эти модели и методы позволили качественно осознать характер оптимальных или близких к оптимальным процессам управления запасами.

Цели. Получение многопродуктовой модели управления запасами с произвольными поставками кратной периодичности с минимальным оборотным капиталом, анализ и сравнение с моделью Кулаковых, моделирование на реальных данных.

Методология. Авторская многопродуктовая модель управления запасами с кратной периодичностью строится на предположении, что в начале цикла полностью закупается только первый ресурс, оставшиеся ресурсы в начальный момент времени закупается долями и затем докупаются внутри цикла. Объем поставок ресурсов не ограничен, периодичность поставок всех ресурсов кратная. Основой модели являются балансовые уравнения для начального момента времени, а также в момент докупки дефицита ресурсов.

Результаты. Построена многопродуктовая модель управления запасами с произвольным объемом поставок и кратной периодичностью. Проведено сравнение с моделью Кулаковых и моделирование на реальных данных для филиала «ВостокАвтоТранс» ТОО «ВостокЦветМет» (Республика Казахстан).

Выводы. Предложенная модель позволяет сэкономить до 21% оборотных средств по сравнению с моделью Кулаковых.

© Издательский дом ФИНАНСЫ и КРЕДИТ, 2018

Для цитирования: Мицель А.А., Анпилогова К.А. Многопродуктовая модель управления запасами с кратной периодичностью поставок // *Экономический анализ: теория и практика*. – 2019. – Т. 18, № 12. – С. 2307 – 2321.
<https://doi.org/10.24891/ea.18.12.2307>

Научные основы теории управления запасами предприятия были заложены в монографии Д. Букана и Э. Кенигсберга [1].

В работе [2] был проведен анализ многолетнего опыта создания математических моделей, продемонстрированы различные способы систематизации моделей и методов теории логистики, а также указывалось, что все модели разделяются на три класса. В первый входят методы и модели, используемые при решении поставленных задач в условиях заранее определенных параметров при отсутствии каких-либо ограничений исходящих извне. Во второй класс входят модели и методы, используемые при решении задач в условиях риска и неопределенности, но отсутствия конкуренции. В третий класс объединяются методы и модели решения задач в условиях конкурентной борьбы.

В работе [4] представлена методика оптимизации объема поставок и цены реализации различных категорий товаров. Вопросы оптимизации объема заказа и цены реализации товаров потребителям при случайном спросе рассмотрены в работах [5–7].

В исследовании [3] авторы условно разделили модели управления запасами на одноэтапные и многоэтапные модели. Одноэтапные модели в основном используются торговыми компаниями, деятельность которых носит сезонный характер, именно из-за этого разовая закупка товара осуществляется один раз у единственного поставщика при определенных условиях поставки, следующая же закупка – у следующего поставщика. Многоэтапные модели находят применение в схожих ситуациях, когда на определенном этапе закупается определенный товар на различных условиях покупки. Таким образом, модели, содержащие множество этапов, являются более актуальными в текущих рыночных условиях, так как имеются предложения на один товар от множества поставщиков. Кроме того, модель, предложенная в работе [3], ограничена тем, что товар нельзя заказать у нескольких поставщиков одновременно на

одном этапе. Помимо этого, модель имеет ограничения, согласно которым нет возможности заказа товара в одно время у нескольких поставщиков на одном этапе. Также стоит зафиксировать, что для увеличения оперативности принятия необходимого решения, требуется неоднократное проведение поиска наиболее эффективного.

В статье [8] изложен алгоритм многокритериального распределения товаров в складской системе, рассмотрен подход к детерминированию оптимального решения многокритериальной задачи распределения товара на участках сети склада. Основой подхода является имитационное моделирование с использованием методов линейного программирования, в том числе с применением процессов аналитической иерархии в целях учета предпочтений сотрудника, принимающего решение. Учету неопределенности спроса при оптимизации системы управления запасами посвящена статья [9], в которой описана стохастическая модель управления запасами торговой компании, основанная на принципе сбалансированности издержек и позволяющая определить оптимальный момент назначения поставки, минимизирующий общие издержки.

Авторы работы [10] предложили многономенклатурную модель оптимального размера заказа ЕОQ с учетом оптовых и дифференциальных скидок. Вопросы, связанные с определением оптимальных значений показателей модели ЕОQ с учетом дефицита, рассматриваются в работе [11], в которой предложены три модели – с отложенным спросом, с дополнительными поставками и с потерей требований. Для учета случайных факторов в ряде статей [5, 8, 12, 13] по управлению запасами используется имитационное моделирование. Например, в обзорной статье [12] проанализированы иностранные публикации, посвященные специфике взаимодействия производства и поставщиков, а также анализу логистических сетей поставщиков автомобильной промышленности, представлен краткий обзор состояния отрасли в России. Проведен анализ

материалов, в которых при оптимизации логистических сетей использовался метод имитационного моделирования.

Наряду с количественными методами при решении задач управления запасами широкое применение находят качественные методы [14–16]. Например, в работе [14] рассмотрены способы модернизации классического метода экономических компромиссов, который широко используется при создании рациональных решений в случае конфликта между функциональными подразделениями организации – участниками собственных цепей поставок. Представлены коррективы оценки весов частных критериев оптимизации с применением методов аналитической иерархии, а также увеличения числа вероятных альтернатив при помощи диаграммы разрешения конфликтов. В статье [15] рассматриваются аналитический и экспертный подходы, на основе которых проводится выбор поставщиков; проводится сравнительная оценка экспертных методов выбора: балльно-рейтинговая оценка, метод анализа иерархий и общий алгоритм выбора посредников. На основании выполненных расчетов были сделаны выводы о возможности применения каждого из методов. В работе [16] отмечается, что главный недостаток многих рассмотренных в научных источниках модифицированных моделей расчета ЕОQ заключается в том, что они учитывают лишь один либо два из множества признаков. Предложено применять морфологический метод исследования. Разработаны морфологические таблицы для формирования новых моделей ЕОQ, а также алгоритм для выбора наиболее адекватной бизнес-ситуации модифицированной модели ЕОQ.

В статье [17] рассматривается задача доставки однородного продукта различным клиентам во взаимосвязи с задачами управления запасами, транспортировкой и складированием. Приведены математическая модель и общая схема алгоритма решения поставленной задачи. Особое внимание уделено управлению запасами. При этом предложено объединить в единую подсистему различные модели этой

задачи: детерминированные, вероятностные и имитационную.

В работе [18] рассматривается задача расчета оптимального размера партии поставки с учетом ряда ограничений, а именно – по предложению поставщиков и спросу потребителей, по емкости склада, бюджетные и др. Для решения задачи выбора поставщиков и оптимизации размера партии поставки в условиях изменяющегося спроса авторы работы используют методы математического программирования.

В статье [19] рассматриваются вопросы повышения эффективности управления оборотными средствами торгового предприятия на основе автоматизированного планирования. При этом используется логистический подход к формированию стратегии управления, обеспечивающий максимальный выигрыш при минимальных потерях. Для этого разработана функциональная модель процесса планирования поставок товара. Рассмотрен аналитический подход по вероятностному моделированию динамики движения оборотных средств на основе упрощенной структуры процессов взаимодействия экономических агентов предприятия.

В работах [20, 22] рассмотрена задача управления запасами предприятия с использованием многопродуктовой модели при ограничении на размер оборотного капитала. Рассмотрены следующие ситуации: равная периодичность и равная стоимость поставок n товаров; равная периодичность и произвольная стоимость поставок n товаров. Проведено исследование нормировочного множителя K .

Анализ модели [21] показал, что недостающие запасы ресурсов пополняются в объеме большем, чем это необходимо. В результате требуется иметь в наличии больше оборотных средств. В свою очередь это приводит к тому, что к концу цикла часть этих ресурсов остается.

В работе [23] предложена модель, в которой пополнение недостающих ресурсов производится в объеме, равном дефициту

данного ресурса. Было проведено сравнение моделей, предложенных в работах [21] и [23], которое показало, что при десяти видах ресурсов модель управления запасами [23] дает выигрыш до 30% по сравнению с моделью, предложенной в работе [21].

В работе [24] описываются результаты развития теоретических и практических методов решения задачи. Автор работы заостряет внимание на том, что нет какого-либо универсального метода решения задачи в условиях неопределенности спроса, и утверждает, что проблема управления запасами в условиях нестационарности остается актуальной, так как без проведения дополнительных экспериментальных исследований нельзя утверждать, что относительно простые модели и алгоритмы могут адекватно описывать реальные процессы управления запасами.

В работе [25] исследована математическая модель управления запасами компании в целях оценки отклонений параметров модели со случайным интервалом времени между поставками от параметров оптимальной модели поставки двух видов товаров с одинаковым размером стоимости и равными интервалами по времени между поставками, что в свою очередь позволяет дать оценку избыточному объему оборотных средств, которые были инвестированы в запасы, а также найти величину возможной экономии затрат, следовательно, возможного вознаграждения поставщикам для стимулирования их к выполнению условий договора «точно вовремя».

Модель позволяет дать оценку отклонению величины нормировочного коэффициента, который определяет объем оборотных средств, инвестируемых в запасы, в модели со случайным интервалом между поставками от его оптимальной величины, полученной при условии выполнения оптимальных параметров поставок товаров и, таким образом, оценить необоснованные инвестиции в оборотные средства и избыточные затраты, связанные с управлением запасами. Результаты исследования могут использоваться компаниями при планировании поставок

закупаемых товаров для нахождения более выгодных условий договоров с поставщиками.

Кроме того, была доказана экономическая целесообразность выполнения оптимальных условий поставок товаров и оценен уровень отклонений от оптимальных параметров при несоблюдении этих условий поставщиками.

В работе [26] предложена трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом с равной периодичностью поставок при условии, что ресурсы пополняются в размере дефицита данного ресурса. Показано, что модель позволяет сэкономить до 40,8% оборотных средств.

Задачу управления запасами можно свести к транспортной задаче или в более общем случае – к задаче линейного программирования. Однако мы получим при этом не аналитическую, а алгоритмическую модель. С точки зрения численной реализации задача линейного программирования представляет собой достаточно трудоемкий процесс, особенно при большой размерности задачи. Достоинством моделей [20–23] является то, что они представлены в виде аналитических формул, по которым по заданным исходным данным (количество товаров, объем партии, время цикла) можно однозначно получить ответ о доле закупки товаров в начале цикла и моментах времени их докупки. Однако получить аналитическую многопродуктовую модель управления запасами с кратной периодичностью удастся лишь при числе товаров, равном двум. Такая модель получена авторами работы [22].

В данном случае мы предлагаем алгоритмическую многопродуктовую модель управления запасами с кратной периодичностью в общем случае при числе товаров больше двух.

Описание модели. *Двухпродуктовая модель. Кратность поставки второго ресурса равна 2 ($m = 2$).*

Пусть предприятие закупает два вида ресурсов. Объем первого ресурса составляет q_1 в натуральных единицах, стоимость единицы ресурса составляет d_1 денежных единиц; объем второго ресурса и цена

составляют q_2 и d_2 соответственно. Период поставок первого вида ресурса (цикл) примем равным T , период поставки второго ресурса равен $T / 2$. Объем средств на покупку ресурсов ограничен следующей величиной:

$$Y_m \leq d_1 q_1 + d_2 q_2. \quad (1)$$

Будем для определенности полагать, что ресурс 1 закупается в начале периода полностью, а ресурс 2 – частично в объеме $k_2 q_2$, где $k_2 \leq 1$ – доля второго ресурса.

Тогда

$$d_1 q_1 + k_2 d_2 q_2 = Y_m. \quad (2)$$

Будем полагать, что ресурсы расходуются с постоянной интенсивностью b_1 и b_2 .

Введем следующие обозначения, учитывая, что $a_1 \geq a_2$:

$$a_1 = d_1 q_1; a_2 = d_1 q_2; \quad (3)$$

$$a = a_1 + a_2; \quad (4)$$

$$b_1 = a_1 / T; b_2 = 2(a_2 / T); \quad (5)$$

$$b = b_1 + b_2. \quad (6)$$

Тогда уравнения, определяющие минимальную величину ресурсов $Y_{\min}$ и моменты докупки второго ресурса t_{21} и t_{22} имеют вид:

$$Y_{\min}^{(2,2)} - b t_{21} + a_2 (1 - k_2) = Y_{\min}^{(2,2)};$$

$$a_2 k_2 = b_2 t_{21};$$

$$Y_{\min}^{(2,2)} - b t_{22} + a_2 (1 - k_2) + a_2 = Y_{\min}^{(2,2)}; \quad (7)$$

$$a_2 (1 - k_2) = b_2 (t_{22} - t_{21});$$

$$Y_{\min}^{(2,2)} = a_1 + k_2 a_2,$$

где k_2 – доля второго ресурса в начале цикла.

Первое и третье уравнения являются балансовыми для моментов времени t_{21} и t_{22} соответственно; второе и четвертое уравнения выражают бездефицитность второго ресурса в моменты времени t_{21} и t_{22} ; пятое уравнение определяет необходимый объем оборотных средств.

В этой системе одно уравнение избыточно и его необходимо исключить.

Анализ первого и третьего уравнений показывает, что максимальное значение минимально необходимых оборотных средств определяется третьим уравнением. Поэтому исключаем первое уравнение.

Решение системы (7) имеет вид

$$\begin{aligned} t_{21} &= \frac{a_2}{b_2} k_2; \quad t_{22} = \frac{a_2}{b_2}; \\ k_2 &= 2 - \frac{b}{b_2}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$Y_{\min}^{(2,2)} = a_1 + k_2 a_2 = a_1 + a_2 \left(2 - \frac{b}{b_2} \right).$$

В терминах величин a_i имеем:

$$\begin{aligned} k_2 &= 2 - \frac{a_1 + 2a_2}{2a_2}; \\ t_{21} &= \frac{k_2}{2} T; \quad t_{22} = \frac{1}{2} T; \end{aligned} \quad (9)$$

$$Y_{\min}^{(2,2)} = a_1 + k_2 a_2 = a_1 + a_2 \left(2 - \frac{a_1 + 2a_2}{2a_2} \right).$$

Нормировочный коэффициент равен

$$K^{(2,2)} = \frac{Y_{\min}^{(2,2)}}{Y_{\Sigma}^{(2)}} = \frac{1}{a} \left(a_1 + a_2 \left(2 - \frac{a_1 + 2a_2}{2a_2} \right) \right). \quad (10)$$

Здесь суммарный запас ресурсов имеет вид:

$$Y_{\Sigma}^{(2)} = a = a_1 + a_2. \quad (11)$$

Кратность поставки второго ресурса равна m .

Проводя те же рассуждения, получим ту же модель (8), в которой величину b_2 примем за

$$b_2 = m a_2 / T. \quad (12)$$

Моменты времени докупки второго ресурса:

$$\begin{aligned} t_{23} &= t_{22} + \frac{T}{m}, \quad t_{24} = t_{23} + 2 \frac{T}{m}, \dots, t_{2m} = \\ &= t_{22} + (m-2) \frac{T}{m}. \end{aligned} \quad (13)$$

В терминах стоимости закупок a_i получим:

$$\begin{aligned}
k_2 &= 2 - \frac{a_1 + ma_2}{ma_2}; \\
t_{21} &= \frac{k_2}{m}T; \quad t_{22} = \frac{1}{m}T; \\
t_{23} &= t_{22} + \frac{T}{m}, \dots, t_{2m} = t_{22} + (m-2)\frac{T}{m}; \\
Y_{\min}^{(2,m)} &= a_1 + k_2a_2 = a_1 + a_2 \left(2 - \frac{a_1 + ma_2}{ma_2} \right).
\end{aligned} \quad (14)$$

Нормировочный коэффициент равен

$$K^{(2,m)} = \frac{Y_{\min}^{(2,m)}}{Y_{\Sigma}^{(2)}} = \frac{1}{a} \left(a_1 + a_2 \left(2 - \frac{a_1 + ma_2}{ma_2} \right) \right). \quad (15)$$

Причем суммарный запас ресурсов имеет следующий вид:

$$Y_{\Sigma}^{(2)} = a = a_1 + a_2. \quad (16)$$

Был получен вывод уравнений для трехпродуктовой модели. Анализ показал, что аналитическую модель получить не удастся из-за избыточности уравнений и, как следствие, неоднозначности решения. Поэтому пришлось отказаться от аналитической модели и перейти к алгоритмической. Запишем окончательные выражения для продуктовой модели управления запасами.

Предприятие закупает n видов ресурсов. Объем первого ресурса составляет q_1 в натуральных единицах, стоимость единицы ресурса составляет d_1 денежных единиц; объем второго ресурса и цена составляют q_2 и d_2 соответственно; объем третьего ресурса и цена будут составлять q_3 и d_3 и т.д.

Период поставок первого вида ресурса (цикл) примем равным T , период поставки второго ресурса примем за T/m_2 , третьего – T/m_3 и так далее, где $m_i, i = \overline{1, n}$ – кратность поставки.

Объем средств ограничен величиной

$$Y_m \leq d_1q_1 + d_2q_2 + \dots + d_nq_n. \quad (17)$$

Будем полагать, что первый ресурс закупается полностью в начале периода, а второй, третий и другие ресурсы – частично в следующих объемах: $k_2q_2, k_3q_3, \dots, k_nq_n$, где k_i – доля соответствующего ресурса.

Тогда

$$d_1q_1 + k_2d_2q_2 + k_3d_3q_3 + \dots + d_nq_n = Y_m. \quad (18)$$

Полагая, что ресурсы расходуются с постоянной интенсивностью, получим:

$$\begin{aligned}
Y_{\min}^{(n,m_2,\dots,m_n)}(k_2, \dots, k_n) &= a_1 + \sum_{i=2}^n k_i a_i \rightarrow \min; \\
-b \frac{a_n}{b_n} k_n + a_n (1 - k_n) &= 0; \\
-b \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} k_{n-1} + a_n (1 - k_n) + a_{n-1} (1 - k_{n-1}) &\leq 0; \\
\dots \\
-b \frac{a_2}{b_2} k_2 + \sum_{i=2}^n a_i (1 - k_i) &\leq 0; \\
-b \frac{a_n}{b_n} + \sum_{i=2}^n a_i (1 - k_i) + a_n &\leq 0; \\
-b \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \sum_{i=2}^n a_i (1 - k_i) + a_n + a_{n-1} &\leq 0; \\
\dots \\
-b \frac{a_2}{b_2} + \sum_{i=2}^n a_i (1 - k_i) + \sum_{i=2}^n a_i &\leq 0.
\end{aligned} \quad (19)$$

При этом

$$0 < k_i \leq 1, i = 2, \dots, n. \quad (20)$$

Таким образом, имеем задачу линейного программирования. Решением задачи являются доли ресурсов $k_2, \dots, k_n$. На следующем этапе подставляем $k_2, \dots, k_n$ в систему:

$$\begin{aligned}
a_n (1 - k_n) &= b_n (t_{n,2} - t_{n,1}); \\
a_{n-1} (1 - k_{n-1}) &= b_{n-1} (t_{n-1,2} - t_{n-1,1}); \\
\dots \\
a_2 (1 - k_2) &= b_2 (t_{2,2} - t_{2,1}).
\end{aligned} \quad (21)$$

$$K^{(n, m_2, m_3)} = \frac{Y_{\min}^{(n, m_2, m_3)}(k_2, \dots, k_n)}{Y_{\Sigma}^{(n)}}. \quad (22)$$

Здесь общий объем ресурсов

$$Y_{\Sigma}^{(n)} = a = \sum_{i=1}^n a_i. \quad (23)$$

Численное моделирование. Приведем результаты моделирования и сравнение с моделью Кулаковых [22].

В статье [22] приведена модель управления запасами при поставке двух видов товаров с кратной периодичностью. Поэтому сравнение дадим только для двухпродуктовой модели.

Модель Ю.Н. Кулаковой дает следующее решение для двухпродуктовой модели:

$$\begin{aligned} t_{21} &= \frac{a_2}{a_1 + ma_2} T, t_{2,j} = t_{21} + \frac{T}{m}, j = 2, \dots, m; \\ k_2 &= \frac{ma_2}{a_1 + ma_2}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} Y_{\min}^{(2,m)} &= a_1 + a_2 k_2; \\ K^{(2,m)} &= \frac{Y_{\min}^{(2,m)}}{Y_{\Sigma}^{(2)}} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left(a_1 + a_2 \frac{ma_2}{a_1 + ma_2} \right). \end{aligned}$$

Для нашей модели имеем

$$\begin{aligned} k_2 &= 2 - \frac{a_1 + ma_2}{ma_2}; \\ t_{21} &= \frac{k_2}{m} T, t_{22} = \frac{1}{m} T; \\ t_{2,j+1} &= t_{2,j} + \frac{T}{m}, j = 2, 3, \dots, m; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Y_{\min}^{(2,m)} &= a_1 + k_2 a_2 = a_1 + a_2 \left(2 - \frac{a_1 + ma_2}{ma_2} \right); \\ K^{(2,m)} &= \frac{Y_{\min}^{(2,m)}}{Y_{\Sigma}^{(2)}} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left(a_1 + a_2 \left(2 - \frac{a_1 + ma_2}{ma_2} \right) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай равной стоимости поставок $a_1 = a_2$. Из формул (24), (25) получим следующие выражения для нормировочного коэффициента.

Модель Кулаковой:

$$K^{(2,m)} = \frac{Y_{\min}^{(2,m)}}{Y_{\Sigma}^{(2)}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{1+m} \right). \quad (26)$$

Наша модель:

$$K^{(2,m)} = \frac{Y_{\min}^{(2,m)}}{Y_{\Sigma}^{(2)}} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(2 - \frac{1+m}{m} \right) \right). \quad (27)$$

На рис. 1 представлены нормировочные коэффициенты $KK(m)$ и $KM(m)$, вычисленные по формулам (26) и (27) соответственно.

Видно, что нормировочный коэффициент модели Кулаковой $KK(m)$ больше, чем нормировочный коэффициент рассмотренной модели $KM(m)$.

Наибольшее расхождение наблюдается при кратности поставки второго товара, равной 2. При $m = 2$ расхождение составляет 11%.

С ростом m расхождение уменьшается и стремится к нулю, при этом нормировочные коэффициенты стремятся к единице. Так, при $m = 7$ расхождение составляет менее 1%.

Расчеты показывают, что при $m = 50$ расхождение значений нормировочного коэффициента модели Кулаковой KK и нормировочного коэффициента модели KM составляет 0,99.

Увеличение частоты поставок одного из товаров приводит к существенному росту минимаксного нормировочного множителя, при этом в каждом варианте кратности периодов поставок оптимальное значение минимаксного нормировочного множителя достигается только при условии выполнения оптимального соотношения стоимостей партий поставляемых товаров. Причем, чем больше кратность периодов поставок, тем ниже должно быть это соотношение стоимостей.

Уже при достижении пятикратной периодичности поставок минимаксный нормировочный множитель становится больше 0,9, и дальнейший рост кратности периодов все быстрее приближает его к единице, следовательно, никакая оптимизация в этих условиях уже практически невозможна.

Отсюда можно заключить, что наличие в номенклатуре поставляемых на предприятие товаров таких видов, которые поставляются редко, сводит на нет все усилия менеджеров по оптимизации поставок.

Поэтому единственным способом минимизации оборотного капитала, инвестируемого в запасы, является максимальное сближение значений периодов поставок товаров, выполнение поставок с оптимальным сдвигом и неукоснительное выдерживание графика поставок предприятиями-поставщиками. Одновременно с этим необходимо максимально выровнять стоимость партий поставляемых товаров. Предприятие должно вести работу с поставщиками в этом направлении, добиваясь от них выполнения достигнутых договоренностей по параметрам поставок, возможно, создавая материальную заинтересованность поставщиков в строгом соблюдении графика и объемов поставок.

На *рис. 2* показано расхождение нормировочных коэффициентов $\Delta(m)$, которое было оценено с помощью относительной погрешности:

$$\Delta(m) = \frac{KK(m) - KM(m)}{KM(m)}.$$

Фактически это означает экономию оборотных средств. На *рис. 2* видно, что с ростом m расхождение быстро убывает. Тем не менее, как уже отмечалось, при $m = 2$ экономия

достигает 11%. Это обусловлено тем, что докупка товаров производилась только в минимально необходимом количестве.

Моделирование на реальных данных. Сфера складирования является неотъемлемой частью любого предприятия. В качестве исходных использованы данные из расходно-аналитической сводки по филиалу ТОО «Востокцветмет» «ВостокАвтоТранс» (Республика Казахстан).

Таким образом, рассматривается система типа заводского склада, куда продукция, произведенная одним цехом, поступает с определенной интенсивностью и используется в производстве другого цеха.

Данные по запасам сырья и материалов в октябре 2016 г. представлены в *табл. 1*. Предприятие в октябре закупило пять видов ресурсов. Для применения моделей данные были предварительно отсортированы в порядке убывания их стоимости.

Реальные оборотные средства на создание запасов и минимально необходимые средства, рассчитанные по авторской модели и модели Кулаковых, представлены в *табл. 2*. Здесь же приведена выгода на создание запаса оборотных средств при использовании модели Кулаковых и авторской модели. Видно, что авторская модель дает большую экономию средств. Важным следствием применения модели управления запасами с ограниченным объемом средств является неукоснительное выдерживание графика поставок предприятиями-поставщиками.

Таблица 1

Данные по запасам сырья и материалов в октябре 2016 г.

Table 1

Data on the stock of raw materials and supplies in October 2016

Сырье и материалы	Количество	Сумма, тенге
Дизельное топливо, л	31 200	5 553 600
Бензин АИ-92, л	22 197,7	2 841 305
Кислород технический, л	114	1 457 140
Масло SHELL RIMULA R3 10W, л	1 254	1 375 638
Тосол, л	1 200	340 449
Итого...	55 965,7	11 568 132

Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Таблица 2

Оборотные средства на создание запасов и минимально необходимые средства, рассчитанные по авторской модели и модели Кулаковых

Table 2

Working capital for inventory building and minimum required funds calculated under our own model and the Kulakovs' model

Показатель	Значение
Реально затраченные средства, тенге	11 568 132
По модели Кулаковых	
Сумма, тенге	9 601 549,6
Выгода, %	17,03
По авторской модели	
Сумма, тенге	9 138 824, 3
Выгода, %	21,01

Источник: авторская разработка

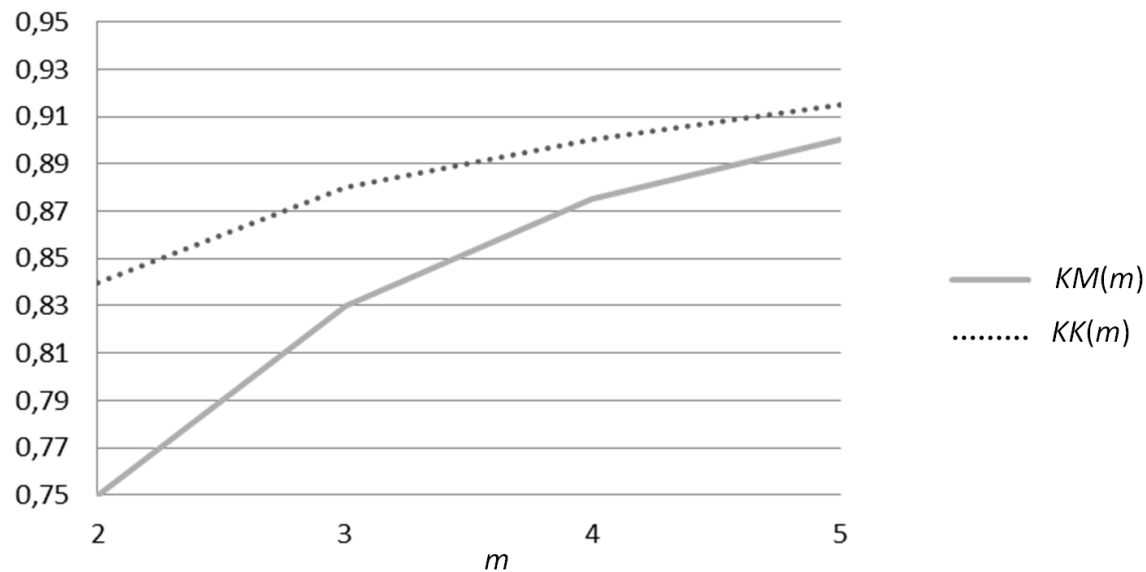
Source: Authoring

Рисунок 1

Нормировочные коэффициенты $KK(m)$ и $KM(m)$

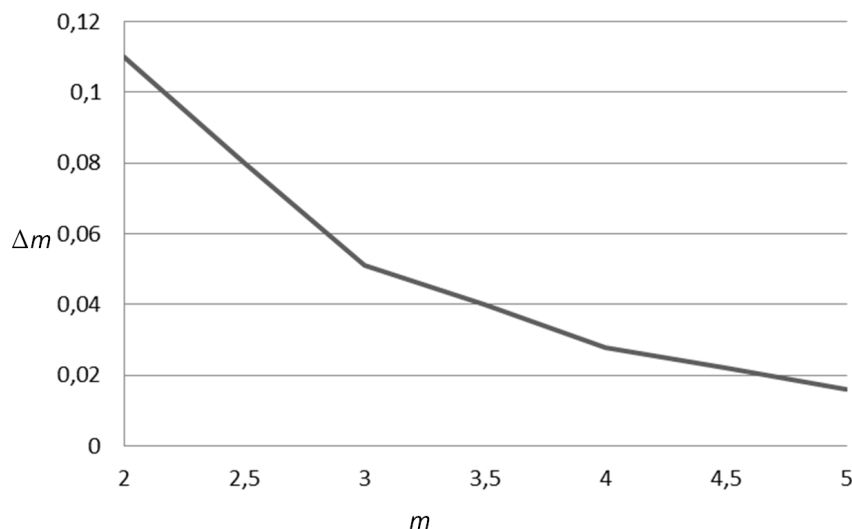
Figure 1

Normalization coefficients $KK(m)$ and $KM(m)$



Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Рисунок 2**Реальные оборотные средства на создание запасов и минимально необходимые средства****Figure 2****Real working capital for inventory building and minimum required funds**

Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Список литературы

1. Букан Дж., Кенигсберг Э. Научное управление запасами. М.: Наука, 1967. 423 с.
2. Свиридова О.А. Математические модели и методы теории управления запасами. Виды и классификации // Логистика. 2010. № 4. С. 21–22.
URL: <http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/21-22.pdf>
3. Кузнецов Д.Н., Толстых С.С. Стохастическая модель многоэтапного управления многопродуктовыми запасами // Управление общественными и экономическими системами. 2007. № 1. URL: https://studylib.ru/doc/874168/stokhasticheskaya-model._-mnogoe-tapnogo-upravleniya
4. Волобуева Е.Ю. Возможности оптимизации объема заказа и цены реализации товара в цепи поставок // Логистика. 2010. № 3. С. 36–37.
URL: <http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/36-37.pdf>
5. Соколов Г.А., Волобуева Е.Ю. Марковская модель оптимизации процесса поставки товаров с одношаговой потребительской ценностью // Логистика. 2012. № 11. С. 46–48.
URL: http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/46-49_1.pdf
6. Волобуева Е.Ю. Стохастическая модель оптимизации объема заказа и цены его реализации в цепи поставок по критерию рентабельности // Логистика и управление цепями поставок. 2012. № 2. С. 81–87. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/1340>
7. Бродецкий Г.Л., Волобуева Е.Ю. Управление цепями поставок при многих критериях в условиях случайного спроса // Логистика. 2012. № 3. С. 32–35.
URL: <http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/32-35.pdf>

8. *Бродецкий Г.Л., Гусев Д.А., Кулешова Е.С.* Алгоритм многокритериального распределения товаров в складской сети // *Логистика*. 2014. № 8. С. 24–28.
URL: https://studylib.ru/doc/2486683/algorithm-mnogokriterial._nogo-raspredeleniya
9. *Косоруков О.А., Свиридова О.А.* Учет неопределенности спроса при оптимизации системы управления запасами // *Логистика*. 2012. № 6. С. 12–13.
URL: http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/12-13_12.pdf
10. *Лукинский В.С., Воробьева Н.И.* Многономенклатурная модель оптимального размера заказа со скидками // *Логистика*. 2015. № 4. С. 54–59.
11. *Лукинский В.С., Лукинский В.В., Маевский А.Г.* Формирование модели расчета оптимальной партии заказа с учетом дефицита // *Логистика и управление цепями поставок*. 2014. № 1. С. 43–54. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/517>
12. *Рожков М.И.* Имитационное моделирование логистических сетей поставщиков в автомобильной промышленности // *Логистика и управление цепями поставок*. 2012. № 2. С. 40–49. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/avtoram/item/797>
13. *Пилипчук С.Ф., Радаев А.Е.* Формирование оптимальной системы поставки грузов с использованием средств имитационного моделирования // *Логистика и управление цепями поставок*. 2013. № 6. С. 43–52. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/525>
14. *Виноградов А.Б.* Использование модифицированного метода экономических компромиссов при разрешении конфликтов во внутренней цепи поставок // *Логистика и управление цепями поставок*. 2009. № 4. С. 33–44.
URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/980>
15. *Лукинский В.В., Каткова Е.В.* Анализ методов выбора логистических посредников // *Логистика и управление цепями поставок*. 2014. № 2. С. 49–56.
URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/510>
16. *Воробьева Н.И., Лукинский В.С., Лукинский В.В.* Модель оптимального размера заказа: анализ и пути дальнейшего развития // *Логистика и управление цепями поставок*. 2014. № 3. С. 42–53. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/498>
17. *Валеева А.Ф., Валеев Р.С., Тарасова Т.Д., Газизова Э.И.* О задаче доставки однородного продукта различным клиентам с учетом решения задач управления запасами, маршрутизации и складирования // *Логистика и управление цепями поставок*. 2015. № 2. С. 53–58. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/1195>
18. *Бочкарев А.А., Бочкарев П.А.* Проблема выбора поставщиков и оптимизации размера партии поставки в условиях изменяющегося спроса // *Логистика и управление цепями поставок*. 2014. № 1. С. 37–42. URL: <https://publications.hse.ru/mirror/pubs/share/direct/144475111>
19. *Ямпольский С.М., Шаламов А.С.* Логистический подход к автоматизации управления оборотными средствами торгового предприятия // *Логистика и управление цепями поставок*. 2013. № 4. С. 65–70. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/748>
20. *Кулакова Ю.Н.* Оценка нормировочного множителя в многопродуктовой модели управления запасами предприятия при условии равной периодичности и одинаковой стоимости поставок // *Логистика и управление цепями поставок*. 2012. № 3. С. 76–83.
URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/1338>

21. Кулаков А.Б., Кулакова Ю.Н. Многопродуктовая модель управления запасами предприятия с поставками равной периодичности // *Экономический анализ: теория и практика*. 2013. № 29. С. 58–62. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/mnogoproduktovaya-model-upravleniya-zapasami-predpriyatiya-s-postavkami-ravnoy-periodichnosti/viewer>
22. Кулакова Ю.Н., Кулаков А.Б. Исследование поведения нормировочного множителя в многопродуктовой модели управления запасами при поставке двух видов товаров с кратной периодичностью // *Экономический анализ: теория и практика*. 2014. № 10. С. 44–54. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-povedeniya-normirovochnogo-mnozhitelya-v-mnogoproduktovoy-modeli-upravleniya-zapasami-pri-postavke-dvuh-vidov-tovarov-s>
23. Мицель А.А., Алимханова Д.А. Многопродуктовая модель управления запасами с равной периодичностью поставок // *Экономический анализ: теория и практика*. 2015. № 40. С. 55–66. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/mnogoproduktovaya-model-upravleniya-zapasami-s-ravnoy-periodichnostyu-postavok>
24. Дзензелюк Н.С. Методология адаптивного управления производственными запасами в условиях нестационарного рынка // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер.: Экономика и менеджмент*. 2011. № 21. С. 27–31. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodologiya-adaptivnogo-upravleniya-proizvodstvennymi-zapasami-v-usloviyah-nestatsionarnogo-rynka>
25. Кулакова Ю.Н., Кулаков А.Б. Многопродуктовая модель управления запасами при поставке двух видов товаров со случайным интервалом между поставками // *Экономический анализ: теория и практика*. 2017. Т. 16. Вып. 6. С. 1152–1169. URL: <https://doi.org/10.24891/ea.16.6.1152>
26. Мицель А.А., Ставчук Л.Г. Трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом // *Экономический анализ: теория и практика*. 2017. Т. 16. Вып. 3. С. 561–572. URL: <https://doi.org/10.24891/ea.16.3.561>

Информация о конфликте интересов

Мы, авторы данной статьи, со всей ответственностью заявляем о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи. Настоящее заявление относится к проведению научной работы, сбору и обработке данных, написанию и подготовке статьи, принятию решения о публикации рукописи.

**A MULTI-PRODUCT MODEL TO MANAGE INVENTORY
WITH MULTIPLE FREQUENCY DELIVERY****Artur A. MITSEL' ^{a,*}, Kseniya A. ANPILOGOVA ^b**^a Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (TUSUR), Tomsk, Russian Federation
maa@asu.tusur.ru
<https://orcid.org/0000-0002-2624-4383>^b National Research Tomsk Polytechnic University (TPU), Tomsk, Russian Federation
Kseniya.anpilogova1994@gmail.com
ORCID: not available

* Corresponding author

Article history:Article No. 473/2018
Received 21 June 2018
Received in revised form
10 July 2018
Accepted 25 November 2019
Available online
25 December 2019**JEL classification:** C61**Keywords:** working capital,
inventory management,
multi-product inventory
management model,
optimization, minimization**Abstract****Subject** The article considers various mathematical models for managing stock inventories.**Objectives** The aims include to obtain a multi-product model to manage inventories with random deliveries of multiple periodicity with minimum working capital, to analyze and compare it with the model by the Kulakovs, and to build models based on real data.**Methods** Our own multi-product model to manage inventory with multiple periodicity is built assuming that at the beginning of the cycle only the first resource is fully purchased, the remaining resources are initially purchased in shares and then additionally purchased within the cycle. The volume of resource supply is not limited, the frequency of supply of all resources is multiple. The model rests on accounting equations at the initial point in time, and also at the time of additional purchase of resource deficit.**Results** We constructed a multi-product model of stock management with an arbitrary volume of supplies and multiple periodicity. We compared it with the model by the Kulakovs and made a real-data model for the VostokAvtoTrans branch of TOO VostokTsvetMet (Republic of Kazakhstan).**Conclusions** The offered model enables to save more than twenty percent of working capital as compared with the model by the Kulakovs.

© Publishing house FINANCE and CREDIT, 2018

Please cite this article as: Mitsel' A.A., Anpilogova K.A. A Multi-Product Model to Manage Inventory with Multiple Frequency Delivery. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2019, vol. 18, iss. 12, pp. 2307–2321.
<https://doi.org/10.24891/ea.18.12.2307>**References**

1. Buchan J., Koenigsberg E. *Nauchnoe upravlenie zapasami* [Scientific Inventory Management]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 423 p.
2. Sviridova O.A. [Mathematical models and methods of inventory control. Types and classifications]. *Logistika = Logistics*, 2010, no. 4, pp. 21–22.
URL: <http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/21-22.pdf> (In Russ.)
3. Kuznetsov D.N., Tolstykh S.S. [Stochastic model of multi-stage management of multistock inventories]. *Upravlenie obshchestvennymi i ekonomicheskimi sistemami*, 2007, no. 1. (In Russ.)
URL: https://studylib.ru/doc/874168/stohasticheskaya-model._-mnogoe-tapnogo-upravleniya
4. Volobueva E.Yu. [Possibility of optimizing the order volume and sales price in the supply chain]. *Logistika = Logistics*, 2010, no. 3, pp. 36–37.
URL: <http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/36-37.pdf> (In Russ.)

5. Sokolov G.A., Volobueva E.Yu. [The Markov model of optimizing the product delivery process with a single-step consumer value]. *Logistika = Logistics*, 2012, no. 11, pp. 46–48.
URL: http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/46-49_1.pdf (In Russ.)
6. Volobueva E.Yu. [The stochastic model of optimizing the order volume and sale price in the supply chain based on profitability criterion]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2012, no. 2, pp. 81–87.
URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/1340> (In Russ.)
7. Brodetskii G.L., Volobueva E.Yu. [Supply chains management in terms of many criteria under conditions of random demand]. *Logistika = Logistics*, 2012, no. 3, pp. 32–35.
URL: <http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/32-35.pdf> (In Russ.)
8. Brodetskii G.L., Gusev D.A., Kuleshova E.S. [The algorithm of multi-criterial distribution of goods in the warehouse network]. *Logistika = Logistics*, 2014, no. 8, pp. 24–28.
URL: https://studylib.ru/doc/2486683/algorithm-mnogokriterial._nogo-raspredeleniya (In Russ.)
9. Kosorukov O.A., Sviridova O.A. [Taking into Account the Demand Uncertainty while Optimizing the Inventory Management]. *Logistika = Logistics*, 2012, no. 6, pp. 12–13.
URL: http://www.logistika-prim.ru/sites/default/files/12-13_12.pdf (In Russ.)
10. Lukinskii V.S., Vorob'eva N.I. [Modified economic order quantity (EOQ) model with discounts]. *Logistika = Logistics*, 2015, no. 4, pp. 54–59. (In Russ.)
11. Lukinskii V.S., Lukinskii V.V., Maevskii A.G. [Building a model to calculate an economic batch quantity taking into account the deficit]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2014, no. 1, pp. 43–54.
URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/517> (In Russ.)
12. Rozhkov M.I. [Simulation modeling of logistic networks of suppliers in the motor industry]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2012, no. 2, pp. 40–49. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/avtoram/item/797> (In Russ.)
13. Pilipchuk S.F., Radaev A.E. [Formation of the optimal system of freight delivery using the simulation modeling tools]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2013, no. 6, pp. 43–52. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/525> (In Russ.)
14. Vinogradov A.B. [Using the modified method of economic trade-offs for conflict resolution in the internal supply chain]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2009, no. 4, pp. 33–44. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/980> (In Russ.)
15. Lukinskii V.V., Katkova E.V. [Analyzing the methods of selecting logistics intermediaries]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2014, no. 2, pp. 49–56. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/510> (In Russ.)
16. Vorob'eva N.I., Lukinskii V.S., Lukinskii V.V. [Economic order quantity model: Analysis and directions of further development]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2014, no. 3, pp. 42–53.
URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/498> (In Russ.)
17. Valeeva A.F., Valeev R.S., Tarasova T.D., Gazizova E.I. [On uniform product delivery to various clients taking into account the solution of problems related to inventory management, routing and warehousing]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2015, no. 2, pp. 53–58. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/1195> (In Russ.)

18. Bochkarev A.A., Bochkarev P.A. [Selecting suppliers and optimizing the size of delivery lot under changing demand]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2014, no. 1, pp. 37–42.
URL: <https://publications.hse.ru/mirror/pubs/share/direct/144475111> (In Russ.)
19. Yampol'skii S.M., Shalamov A.S. [A logistics approach to current assets management automation of a trading company]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2013, no. 4, pp. 65–70. URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/748> (In Russ.)
20. Kulakova Yu.N. [Evaluating the normalization factor in the multi-product model of enterprise inventory management model subject to equal frequency and equal cost of delivery]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2012, no. 3, pp. 76–83.
URL: <http://www.lscm.ru/index.php/ru/po-godam/item/1338> (In Russ.)
21. Kulakov A.B., Kulakova Yu.N. [Multi-product model of control of the reserves of enterprise with the deliveries to the equal periodicity]. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika = Economic Analysis: Theory and Practice*, 2013, no. 29, pp. 58–62.
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/mnogoproduktovaya-model-upravleniya-zapasami-predpriyatiya-s-postavkami-ravnoy-periodichnosti/viewer> (In Russ.)
22. Kulakova Yu.N., Kulakov A.B. [Study of normalization factor behavior in a multiproduct inventory model for delivery of two kinds of goods with multiple periodicities]. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika = Economic Analysis: Theory and Practice*, 2014, no. 10, pp. 44–54.
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-povedeniya-normirovochnogo-mnozhitelya-v-mnogoproduktovoy-modeli-upravleniya-zapasami-pri-postavke-dvuh-vidov-tovarov-s> (In Russ.)
23. Mitsel' A.A., Alimkhanova D.A. [A multi-product model to manage inventory with even frequency of delivery]. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika = Economic Analysis: Theory and Practice*, 2015, no. 40, pp. 55–66. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/mnogoproduktovaya-model-upravleniya-zapasami-s-ravnoy-periodichnostyu-postavok> (In Russ.)
24. Dzenzelyuk N.S. [The methodology of adaptive management of inventories in conditions of a nonstationary market]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Ekonomika i menedzhment = Bulletin of South Ural State University. Series Economics and Management*, 2011, no. 21, pp. 27–31. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodologiya-adaptivnogo-upravleniya-proizvodstvennymi-zapasami-v-usloviyah-nestatsionarnogo-rynka> (In Russ.)
25. Kulakova Yu.N., Kulakov A.B. [A multiproduct inventory control model for supply of two types of goods at random interval between deliveries]. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika = Economic Analysis: Theory and Practice*, 2017, vol. 16, iss. 6, pp. 1152–1169. (In Russ.)
URL: <https://doi.org/10.24891/ea.16.6.1152>
26. Mitsel' A.A., Stavchuk L.G. [A three-product model to manage inventory with random demand]. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika = Economic Analysis: Theory and Practice*, 2017, vol. 16, iss. 3, pp. 561–572. (In Russ.) URL: <https://doi.org/10.24891/ea.16.3.561>

Conflict-of-interest notification

We, the authors of this article, bindingly and explicitly declare of the partial and total lack of actual or potential conflict of interest with any other third party whatsoever, which may arise as a result of the publication of this article. This statement relates to the study, data collection and interpretation, writing and preparation of the article, and the decision to submit the manuscript for publication.