ISSN 2311-8725 (Online)
ISSN 2073-039X (Print)

Математические методы и модели

МНОГОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ ПОСТАВКЕ ДВУХ ВИДОВ ТОВАРОВ СО СЛУЧАЙНЫМ ИНТЕРВАЛОМ МЕЖДУ ПОСТАВКАМИ*

Юлия Николаевна КУЛАКОВА[a,•], Андрей Борисович КУЛАКОВ[b]

[a] кандидат экономических наук, доцент кафедры менеджмента и управления персоналом,
Уральский социально-экономический институт (филиал) Академии труда и социальных отношений,
Челябинск, Российская Федерация
Kulakova174@mail.ru

[b] кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой менеджмента и управления персоналом,
Уральский социально-экономический институт (филиал) Академии труда и социальных отношений,
Челябинск, Российская Федерация
Finansist_97@2074.ru

• Ответственный автор

История статьи:
Получена 30.01.2017
Получена в доработанном виде 10.04.2017
Одобрена 17.05.2017
Доступна онлайн 28.06.2017

УДК 658.7.011.1
JEL: C51, C54, M21

https://doi.org/10.24891/ea.16.6.1152

Ключевые слова: предприятие, управление запасами, оптимизация, многопродуктовая модель, нормировочный множитель

Аннотация

Предмет. Многопродуктовая модель управления входящими запасами предприятия, разработанная для условий поставки двух видов товаров с одинаковой стоимостью поставок и случайным интервалом времени между ними.

Цели. Оценка отклонений параметров модели со случайным интервалом времени между поставками от параметров оптимальной модели поставки двух видов товаров с одинаковой стоимостью и равными интервалами времени между поставками, что позволяет оценить избыточный объем оборотных средств, инвестированных в запасы, и вычислить величину возможной экономии затрат, а, следовательно, возможного вознаграждения поставщикам для стимулирования их к выполнению условий договора «точно вовремя».

Методология. Разработана экономико-математическая модель управления входящими запасами предприятия, которая отличается от существующих многопродуктовых моделей тем, что в ней учтен параметр случайного интервала времени между поставками.

Результаты. Разработанная модель позволяет оценить отклонения величины нормировочного множителя, определяющего объем оборотных средств, инвестируемых в запасы, в модели со случайным интервалом между поставками, от его оптимальной величины, полученной при условии выполнения оптимальных параметров поставок товаров и, таким образом, оценить необоснованные инвестиции в оборотные средства и избыточные затраты, связанные с управлением запасами. Результаты исследования могут использоваться предприятиями при планировании поставок закупаемых товаров для определения наиболее выгодных условий договоров с поставщиками.

Выводы. Доказывается экономическая целесообразность выполнения оптимальных условий поставок товаров и оценивается уровень отклонений от оптимальных параметров при несоблюдении этих условий поставщиками.

Введение

Промышленное предприятие закупает для своей производственной деятельности большую номенклатуру сырья, материалов, полуфабрикатов и готовых комплектующих изделий, что влечет за собой существенные затраты, связанные с формированием и поддержанием запасов. Минимизация суммы этих затрат является оптимизационным критерием в моделях управления запасами.

Классической моделью оптимизации управления запасами по отдельной номенклатурной позиции является модель экономичного размера заказа (EOQ) Р. Уилсона. Она позволяет определить оптимальный размер партии периодических поставок и соответствующую ему оптимальную длительность периода между двумя очередными поставками. Логическим развитием однономенклатурной модели Уилсона являются многономенклатурные модели без учета и с учетом ограничений на размер оборотных средств, модели с допустимым дефицитом, модели с оптовыми скидками и ряд других.

Классификацию и анализ моделей оптимизации, построенных на базе классической модели EOQ, можно найти, например, в работах

* Авторы выражают глубокую благодарность кандидату технических наук, доценту Николаю Петровичу МЕШКОВОМУ за ценные советы при работе над статьей.

Статья предоставлена Информационным центром Издательского дома ФИНАНСЫ и КРЕДИТ при Уральском социально-экономическом институте (филиале) Академии труда и социальных отношений.

Н.И. Воробьевой, В.С. Лукинского, В.В. Лукинского, Д.А. Замалетдиновой, Е.Н. Хоботова [1–3]. Многие авторы продолжают развивать теорию управления запасами, предлагая в своих моделях учитывать такие факторы, как, например, скидки различного типа [4], временная стоимость денег [5, 6], уровень изменчивости спроса [7], неопределенность спроса и его случайных колебаний [8–12], уровень потерь капитала, вложенного в запасы [13], нечеткость начальных условий [14], риски [15]. Новые методы решения известных задач управления запасами предложены в работах [16–19]. Делаются попытки изменить критерий оптимизации с минимума суммарных затрат на среднюю чистую прибыль [20], рентабельность [21]. Разрабатываются модели, учитывающие специфический характер вспомогательных производств [22, 23].

В более ранних наших публикациях[1] рассмотрены условия оптимизации параметров многопродуктовой модели управления запасами предприятия при условии поставок товаров с равной или кратной периодичностью [24].

Научная область управления запасами, исследованная на сегодняшний день, достаточно обширна, тем не менее остается без рассмотрения ряд важных вопросов, в числе которых вопрос оптимизации графика поставок, без которого нельзя решить проблему расчета оптимального сдвига момента поставок товаров разных видов. Очевидно, что любое отклонение фактического графика поставки от оптимального влечет за собой рост затрат, связанных с управлением запасами. Оценке этих отклонений для разработки оптимальных условий договора с поставщиками посвящено авторское исследование.

Постановка задачи исследования

В классической работе Дж. Букана и Э. Кенигсберга [25] введено понятие нормировочного множителя k, используемого в многопродуктовой модели управления запасами предприятия для оценки размеров инвестируемого в запасы капитала X:

$$X = k\sum_{i=1}^{n} q_i p_i, \qquad (1)$$

где q_i – объем поставки товара вида i в натуральных единицах;

p_i – цена единицы товара вида i в денежных единицах;

n – количество видов поставляемых товаров.

Необходимость введения в формулу (1) множителя $k \le 1$ вызвана тем, что партии отдельных видов товаров поступают независимо друг от друга, то есть, как правило, разновременно. Если партии всех видов товаров придут одновременно, X окажется максимальным, а k будет равен своему максимально возможному значению – единице. Из формулы (1) вытекает, что по своей экономической сущности k равен отношению:

$$k = Y_{\max} / Y_{\Sigma}, \qquad (2)$$

где $Y_{\max}$ – максимум суммы стоимости запасов;

Y_{Σ} – сумма максимумов стоимостей запасов.

Знаменатель формулы (2) определяется суммированием стоимостей партий поставок всех видов товаров, что без учета страховых запасов дает

$$Y_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i .$$

Стремясь минимизировать вложенные запасы капитала ($X \to \min$), предприятие должно быть заинтересовано в снижении k и, следовательно, числителя отношения (2) до возможного минимума. Это оптимальное (минимальное из всех максимумов $Y_{\max}$ сумм стоимостей запасов по всем вариантам решения данной задачи оптимизации k) значение числителя (2) назовем минимаксным:

$$Y_{\min\max} = \min_{\forall v}\{Y_{\max}(v)\},$$

где $\forall_v$ – множество всех вариантов решения данной задачи.

Оптимальное (минимаксное) значение нормировочного множителя K может быть в общем виде записано как

$$K = Y_{\min\max} / Y_{\Sigma},$$

где $Y_{\min\max}$ – минимум из максимумов суммы стоимости запасов;

Y_{Σ} – сумма максимумов стоимостей запасов.

В работе [25] Дж. Букан и Э. Кенигсберг предложили принимать k = 0,5 безо всякого математического обоснования этого выбора.

[1] *Кулаков А.Б., Кулакова Ю.Н.* Многопродуктовая модель управления запасами предприятия с поставками равной периодичности // Экономический анализ: теория и практика. 2013. № 29. С. 58–62; *Кулакова Ю.Н., Кулаков А.Б.* Исследование поведения нормировочного множителя в многопродуктовой модели управления запасами при поставке двух видов товаров с кратной периодичностью // Экономический анализ: теория и практика. 2014. № 10. С. 44–54.

Однако нами в работе [24] доказано, что это значение может достигаться только асимптотически при числе видов поставляемых товаров, стремящемся к бесконечности, а на практике при ограниченном числе видов товаров даже минимаксное значение нормировочного множителя существенно выше 0,5, а при отклонении параметров поставок от оптимальных оно еще больше.

К сожалению, общего алгоритма оптимизации нормировочного множителя не существует. Для детерминированных условий оптимизации нам удалось построить достаточно адекватные модели и найти оптимальные решения при весьма общих предположениях. К числу этих моделей оптимизации относятся следующие:

- регулярные поставки на предприятие произвольного числа видов товаров с одинаковой стоимостью партий поставок и равными интервалами между поставками [24];
- регулярные поставки на предприятие произвольного числа видов товаров с одинаковой периодичностью и произвольной стоимостью партий поставок;
- регулярные поставки на предприятие двух видов товаров с разной стоимостью партий поставок и кратной периодичностью;
- регулярные поставки на предприятие двух видов товаров с разной стоимостью партий поставок и некратной периодичностью.

В данном случае рассматривается стохастический вариант детерминированной первой задачи для двух видов товаров.

Напомним, что управляемой переменной в этой детерминированной оптимизационной задаче является величина сдвига по времени θ_2 между моментом поставки очередной партии товара второго вида по отношению к моменту поставки очередной партии товара первого вида [24]. Периодичности поставок партий обоих видов товаров одинаковы, и, следовательно, интервалы между поставками равны между собой: $T_1 = T_2 = T$. Сдвиг θ_2 может принимать любое значение: $0 \le \theta_2 \le T$, а величина относительного сдвига $t = 2 / T$ будет при этом изменяться в диапазоне $0 \le t \le 1$.

Если стоимости партий поставок обоих видов товаров совпадают, оптимальное решение имеет вид, представленный на *рис. 1*.

При этом оптимальный относительный сдвиг поставки второго вида товара по отношению к моменту поставки товара первого вида равен $t^* = \theta_2^* / T = 0{,}5$; оптимальное (минимаксное) значение нормировочного множителя $K = 0{,}75$.

График $k(t)$ имеет воронкообразную форму, симметричную относительно оптимального значения $t^* = 0{,}5$. Минимакс нормировочного множителя $K = 0{,}75$ при $t^* = 0{,}5$; при отклонении t от оптимума нормировочный множитель k растет и достигает своего наихудшего значения $k_{\max} = 1$ при наложении моментов поставок разных видов товаров друг на друга. Это точки начала цикла поставок ($t = 0$) и конца цикла ($t = 1$). В действительности с точки зрения оптимального решения это одна и та же точка, о чем свидетельствует симметрия графика $k(t)$.

Очевидно, минимаксное значение нормировочного множителя K может быть достигнуто только при условии строгого соблюдения поставщиками дисциплины поставок, соответствующей идеологии just-in-time (точно вовремя). В нашем случае это означает, что поставки товаров первого вида должны осуществляться в начале (или в конце) каждого цикла, а поставки товаров второго вида точно в его середине. Любое отклонение от оптимального графика поставок «наказуемо»: k стремительно возрастает, что говорит о дополнительной иммобилизации оборотных средств и необходимости необоснованных инвестиций в производственные запасы.

Оценим количественно нежелательный прирост связанного в запасах оборотного капитала, отражающийся в росте нормировочного множителя по сравнению с его минимаксным значением. Роль варьируемой переменной в задаче оптимизации будет исполнять своеобразный индикатор отступления поставщиков от согласованного оптимального графика поставок точно вовремя. Такими характеристиками надежности/ненадежности поставщиков могут выступать параметры функций плотности вероятности распределения случайной величины относительного сдвига момента поставки очередной партии товара второго вида по отношению к моменту поставки очередной партии товара первого вида.

Мы разработали последовательность таких функций плотности распределения относительного сдвига поставок, логически объединенных в четыре стыкующиеся между собой «семейства».

Первое семейство функций

Первое семейство функций плотности распределения относительного сдвига (*рис. 2*) представляет собой треугольное, унимодальное, симметричное относительно минимакса распределение, изображаемое равнобедренными треугольниками с высотами, проходящими через точку оптимального относительного сдвига $t^* = \theta^*_2 / T = 0,5$.

Начальное распределение в этом семействе – вытянутый вверх вырожденный треугольник с основанием $A_iC_i \to 0$ (то есть к точке B) и высотой $BB_\infty \to \infty$.

Это так называемая δ-функция вида $\delta(t - c)$, принимающая для всех значений $t \neq c$ нулевое значение, а при $t = c$ устремляющаяся к бесконечности, при этом выполняется условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-c)\,dt = 1.$$

Для произвольной функции $\varphi(t)$ определенный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\delta(t-c)\,dt = \varphi(c),$$

так как подынтегральное выражение отличается от нуля в единственной точке c, для которой справедливо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\delta(t-c)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(c)\delta(t-c)\,dt = \varphi(c)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-c)\,dt = \varphi(c)1 = \varphi(c).$$

Применительно к рассматриваемой нами задаче математическое ожидание нормировочного множителя в точке оптимального относительного сдвига поставок ($t = 0,5$):

$$\bar{k} = \int_0^1 k(t)\,\delta(t-0,5)\,dt = k(0,5) = K = 0,75.$$

Плотность распределения относительного сдвига поставок, задаваемая δ-функцией является граничным случаем, соответствующим представлению об идеальных поставщиках, ни при каких условиях не срывающих согласованного с заказчиком оптимального графика поставок. На практике такая ситуация встречается нечасто, и в большинстве случаев имеет место тот или иной разброс величины сдвига поставок относительно его оптимального значения.

Промоделируем ситуацию постепенного нарастания ненадежности поставщиков, сконструировав специально подобранное семейство плотностей распределений относительного сдвига момента поставок с уменьшающейся модой h от бесконечно большого его значения до $h_{min} = 2$ (*рис. 2*). Оказывается, что для задания конкретного распределения вполне достаточно единственного параметра – моды функции $f_1(0,5) = h$.

Для обоснования этого факта воспользуемся условием нормировки

$$\int_0^1 f_1(t)\,dt = 1.$$

Геометрически это означает, что площадь треугольника плотности распределения относительного сдвига поставок (пусть для определенности это треугольник $A_2B_2C_2$ с высотой $BB_2 = h$) равна единице:

$$S_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{1}{2}(A_2C_2)(BB_2) = \frac{1}{2}(A_2C_2)h = 1,$$

откуда $A_2C_2 = 2 / h$.

Из-за симметрии графика плотности распределения относительного сдвига имеем $A_2B = BC_2 = 1 / h$.

Математическое ожидание нормировочного множителя для заданной плотности распределения сдвига поставок $f_1(t)$, $0 \le t \le 1$. можно выразить в виде интеграла

$$\overline{k_1} = \int_0^1 k(t) f_1(t)\,dt = \int_0^{0,5} k_л(t) f_{1л}(t)\,dt +$$
$$+\int_0^{0,5} k_п(t) f_{1п}(t)\,dt,$$

где $k_л(t)$ –левая ветвь графика $k(t)$;

$k_п(t)$ – правая ветвь графика $k(t)$;

$f_{1л}(t)$ – левая ветвь графика плотности распределения относительного сдвига поставок в первом семействе функций;

$f_{1п}(t)$ – правая ветвь графика плотности распределения относительного сдвига поставок в первом семействе функций.

Уравнение левой ветви $k_л(t)$ графика нормировочного множителя (*рис. 1*) получим, «проведя» аналитически прямую линию через точки $A(0;\ 1)$ и $B(0{,}5;\ 0{,}75)$. В общем виде уравнение левой ветви имеет вид

$$k_л(t) = a_л\, t + b_л,\ 0 \le t \le 0{,}5,$$

где $a_л$, $b_л$ – параметры левой ветви.

Подставляя координаты точек, получим:

$$\begin{cases} k_л(0) = a_л\, 0 + b_л = 1 \text{ в точке } A \\ k_л(0{,}5) = a_л\, 0{,}5 + b_л = 0{,}75 \text{ в точке } B. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $a_л = -0{,}5$, $b_л = 1$. Итак, уравнение левой ветви графика нормировочного множителя имеет вид

$$k_л(t) = -0{,}5t + 1,\ 0 \le t \le 0{,}5.$$

Аналогично получим уравнение правой ветви $k_п(t)$ графика нормировочного множителя, проведя аналитически прямую линию через точки $B(0{,}5;\ 0{,}75)$ и $C(1;\ 1)$:

$$k_п(t) = 0{,}5t + 0{,}5, \quad 0{,}5 \le t \le 1.$$

Для вывода уравнений левой и правой ветвей плотности распределения сдвига в первом семействе распределений нам потребуются координаты вершин треугольника, записанные в общем виде (через моду h). Пусть такими точками общего вида будут A_2 с координатами $(0{,}5–1\ /\ h;\ 0)$, $B_2(0{,}5;\ h)$ и $C_2(0{,}5+1\ /\ h;\ 0)$.

Уравнение левой ветви A_2B_2 можно записать как

$$f_{1л}(t) = a_{1л}\, t + b_{1л},\ 0{,}5 - 1\ /\ h \le t \le 0{,}5,$$

где $a_{1л}$, $b_{1л}$ – параметры левой ветви плотности распределения сдвига для первого семейства функций.

Настроим это уравнение на координаты точек A_2, B_2:

$$\begin{cases} f_{1л}(0{,}5 - 1\ /\ h) = a_{1л}\,(0{,}5 - 1\ /\ h) + b_{1л} = 0 \text{ в точке } A_2 \\ f_{1л}(0{,}5) = a_{1л}\, 0{,}5 + b_{1л} = h \text{ в точке } B_2. \end{cases}$$

Решая совместно эти уравнения, получаем уравнение левой ветви плотности распределения сдвига для первого семейства функций:

$$f_{1л}(t) = h^2\, t + (h - 0{,}5h^2),\ \ 0{,}5 - 1\ /\ h \le t \le 0{,}5.$$

Аналогично выведем уравнения правой ветви плотности распределения сдвига в первом семействе функций распределений:

$$f_{1п}(t) = -h^2\, t + (h + 0{,}5h^2),\ \ 0{,}5 \le t \le 0{,}5 + 1\ /\ h.$$

Теперь можем вычислить математическое ожидание нормировочного множителя в первом семействе функций с треугольным унимодальным, симметричным распределением сдвига поставок:

$$\overline{k_1} = \int_{0{,}5-1/h}^{0{,}5} k_л(t) f_{1л}(t)\,dt = \int_{0{,}5}^{0{,}5+1/h} k_п(t) f_{1п}(t)\,dt =$$

$$= \int_{0{,}5-1/h}^{0{,}5} (-0{,}5t+1)\left(h^2 t + h - 0{,}5h^2\right)dt +$$

$$+ \int_{0{,}5}^{0{,}5+1/h} (0{,}5t+0{,}5)\left(-h^2 t + h + 0{,}5h^2\right)dt.$$

После преобразований получаем выражение математического ожидания нормировочного множителя в первом семействе функций распределений плотности

$$\overline{k_1} = 0{,}75 + \frac{1}{6}\frac{1}{h}, \quad 2 \le h < \infty.$$

С точки зрения взаимоотношений поставщиков и получателя рост $h \ge 0$ отражает возрастание ответственности поставщиков за сроки и объемы поставок, свидетельствует о росте дисциплины поставок при обеспечении поставок точно вовремя.

Не следует думать, что система точно вовремя однозначно невыгодна поставщику, так как не позволяет ему экономить на транспортных расходах, объединяя несколько разновременных поставок в одну. Поставщик, который не является монополистом на рынке и дорожит налаженными хозяйственными связями с покупателями товаров, может пойти на некоторые уступки клиентам, чтобы поддержать долговременные устойчивые отношения с ними. В то же время получатель поставок точно вовремя экономит на издержках хранения несвоевременно поступивших запасов, и полученная экономия может и должна быть учтена при заключении контрактов на поставку, что позволит поставщикам полностью или частично компенсировать перерасход своих транспортных затрат.

Дальнейшее уменьшение величины моды h ниже двух невозможно, если пытаться сохранить треугольный вид плотности распределения сдвига поставок (*рис. 2*).

Однако ситуация меняется, если в точках $t = 0$ и $t = 1$ допустить появление конечных положительных плотностей, преобразующих треугольные распределения (*рис. 2*) в пятиугольные (*рис. 3*). Благодаря этому формируется второе семейство плотностей распределения относительного сдвига поставок, открывающее дополнительные перспективы для анализа поведения нормировочного множителя при случайном разбросе сдвига поставок.

Второе семейство функций

В этом семействе мода h постепенно снижается со значения 2 до 1, а само распределение из граничного треугольного $A_0B_0C_0$ через ряд пятиугольных, например, $A_0A_1B_1C_1C_0$ приходит в конечном счете к граничному четырехугольному распределению $A_0A_4C_4C_0$ (*рис. 3*), являющемуся хорошо известным равномерным распределением. По-прежнему мода плотности распределения сдвига располагается на вертикали $t = 0{,}5$. Представленное на *рис. 3* семейство пятиугольных плотностей распределения сдвига также может быть задано единственным параметром – модой h.

Проведя серию математических построений, логика которых аналогична модели первого семейства функций, получили выражение для расчета математического ожидания нормировочного множителя второго семейства функций:

$$\overline{k_2} = \frac{11}{12} - \frac{1}{24}h, \ 1 \le h \le 2.$$

Третье семейство функций

Третье, следующее по логике построения, семейство функций плотностей распределения относительного сдвига поставок, имеющих пятиугольную форму, представлено на *рис. 4*. Однако если распределения семейства, показанного на *рис. 3*, были представлены выпуклыми пятиугольниками и являлись унимодальными (одновершинными), то пятиугольники плотности распределения, приведенные на *рис. 4*, стали невыпуклыми, а сами распределения – бимодальными («двугорбыми»).

Теперь максимумы (моды) распределений образуются не в середине цикла T, а на его краях, причем сами максимумы равны друг другу, а в середине цикла ($t = 0{,}5$) теперь располагается антимода (минимальное значение плотности) распределения. Если в ситуациях, описываемых семействами распределений 1 и 2, поставщики были более или менее безответственными (случайные отклонения от согласованного графика поставок были не очень значительными), то в рассматриваемых далее ситуациях, описываемых семействами 3 и 4 функций распределения плотности относительного сдвига момента поставки, моделируется такое поведение поставщиков, при котором получателю товара наносится наибольший ущерб.

Проведенное нами вычисление математического ожидания нормировочного множителя для третьего семейства плотностей распределения сдвига привело к следующему результату:

$$\overline{k_3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{24}h, \quad 1 \le h \le 2.$$

Четвертое семейство функций

Четвертое, логически последнее из рассматриваемых нами семейств плотностей распределения сдвига, представлено на *рис. 5*. Это семейство содержит все бимодальные шестиугольные распределения с нулевой антимодой и двумя равными друг другу модами, значение которых изменяется от двух до бесконечности.

Выражение математического ожидания нормировочного множителя для четвертого семейства плотностей распределения сдвига получено аналогично предыдущим преобразованиям:

$$\overline{k_4} = 1 - \frac{1}{6}\frac{1}{h}, \ \ 2 \le h < \infty.$$

Результаты расчетов математического ожидания множителя $\overline{k_1} \ldots \overline{k_4}$ для четырех семейств функций плотности $f_1(t)\ldots f_4(t)$ распределения вероятности сдвига момента поставки товаров второго вида по отношению к моменту поставки товара первого вида представлены на *рис. 6, 7*.

Выводы

Нами построена стохастическая модель оптимизации сроков поставок, позволившая не только провести качественный анализ последствий возможных отступлений от оптимального графика поставок точно вовремя, но и получить количественное значение факторов, влияющих на оценку возникающих при этом экономических потерь.

Каждая из функций плотности распределения сдвига однозначно задается единственным параметром – модой плотности распределения $h \geq 1$. Значение моды $h_{\min}$ = 1 задает границу между вторым и третьим семействами функций. Значения моды h = 2 являются граничными как между первым и вторым семействами плотности распределения, так и между третьим и четвертым семействами.

Начальная плотность распределения сдвига в первом семействе задается дельта-функцией, что соответствует случаю абсолютно надежных поставщиков, не допускающих ни малейшего отклонения от оптимального графика поставок; при этом достигается оптимальное значение $K = 0{,}75$. По мере снижения моды h в первом семействе функций наблюдается постепенный и все ускоряющийся нежелательный рост математического ожидания нормировочного множителя $\bar{k}_1$ (h). Его значение на границе между первым и вторым семействами плотности распределения сдвига превышает минимаксное значение на 11,11%.

Второе семейство функций моделирует дальнейшее отступление поставщиков от оптимального графика поставок. При равномерном распределении вероятностей сдвига $\bar{k}_2$ ($h_{\min}$ = 1) = 0,875, и оно превышает K на 16,67%. Расчеты показывают, что последует дальнейшее ухудшение (рост) $\bar{k}_2$, если нарушение графика поставок станет скорее правилом, чем исключением.

Третье семейство функций моделирует ситуацию, когда оптимальному сдвигу поставок T^* = 0,5 соответствует антимода (наименьшее значение) распределения, а равные по величине моды h формируются на краях цикла поставок (T = 0 и $T = 1$). На границе между третьим и четвертым семействами функций $\bar{k}_3$ (h = 2) = 0,9167, что хуже минимаксного значения на 22,22%.

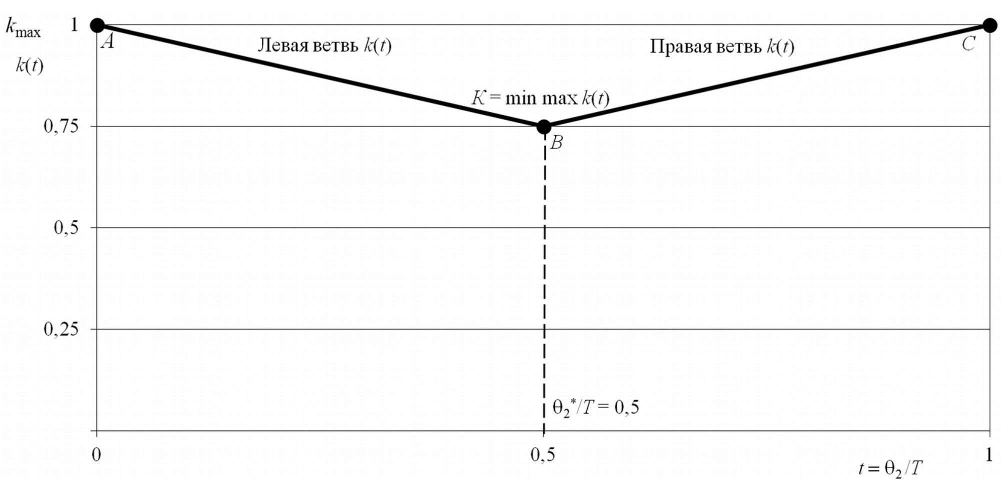
Четвертое семейство функций моделирует ситуацию полного и окончательного отказа поставщиков от соблюдения установленных оптимальных графиком сроков поставки и перехода на сроки поставок, наносящие покупателю наибольший ущерб. В предельном случае вместо оптимального срока поставки T^*= 0,5 все поставки производятся в начале цикла T = 0 или в его конце T = 1. При этом математическое ожидание нормировочного множителя принимает свое наихудшее из всех возможных значений $\bar{k}_4$ ($h \to \infty$) = 1, что превышает минимаксное значение на 33,33%.

Рисунок 1

Зависимость нормировочного множителя *k* от величины относительного сдвига *t* = θ₂ / *T* момента очередной поставки партии второго вида товара по отношению к моменту очередной поставки товара первого вида

Figure 1

Dependence of normalization factor *k* from the value of relative shift $t = \theta_2 / T$ of the moment of next delivery of the batch of type 2 goods relative to the moment of next delivery of the batch of type 1 goods



Источник: авторская разработка

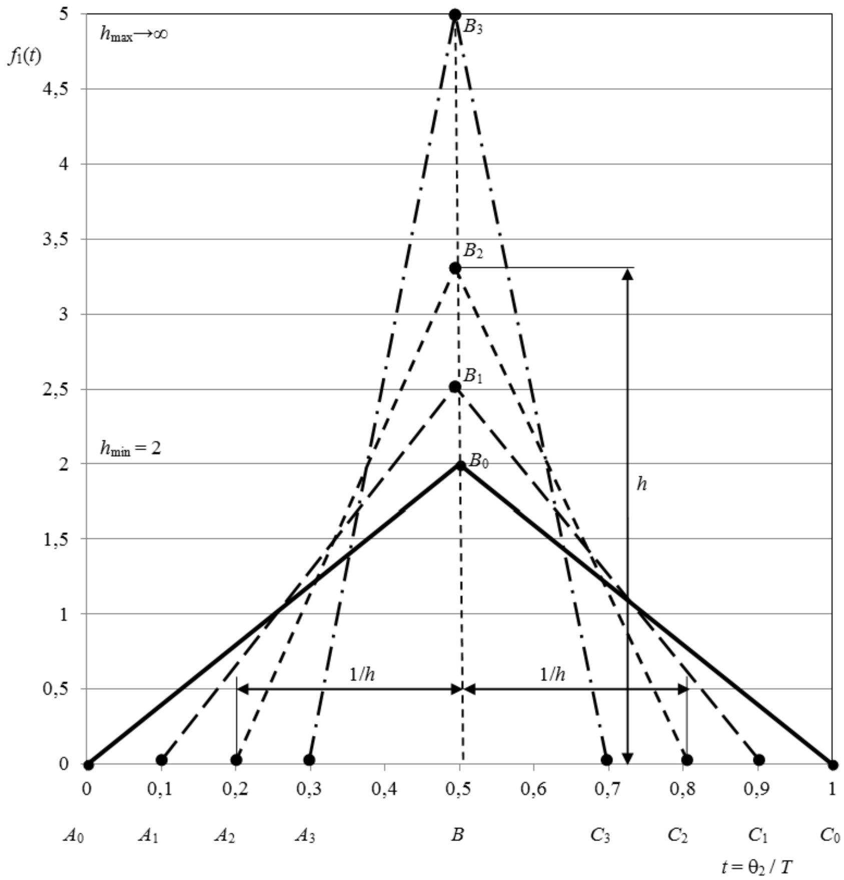
Source: Authoring

Рисунок 2

Семейство треугольных унимодальных, симметричных относительно минимакса функций плотности распределения вероятностей относительного сдвига поставок

Figure 2

Collection of triangle unimodal and symmetric with respect to the minimax probability density functions of relative shift of deliveries



Источник: авторская разработка

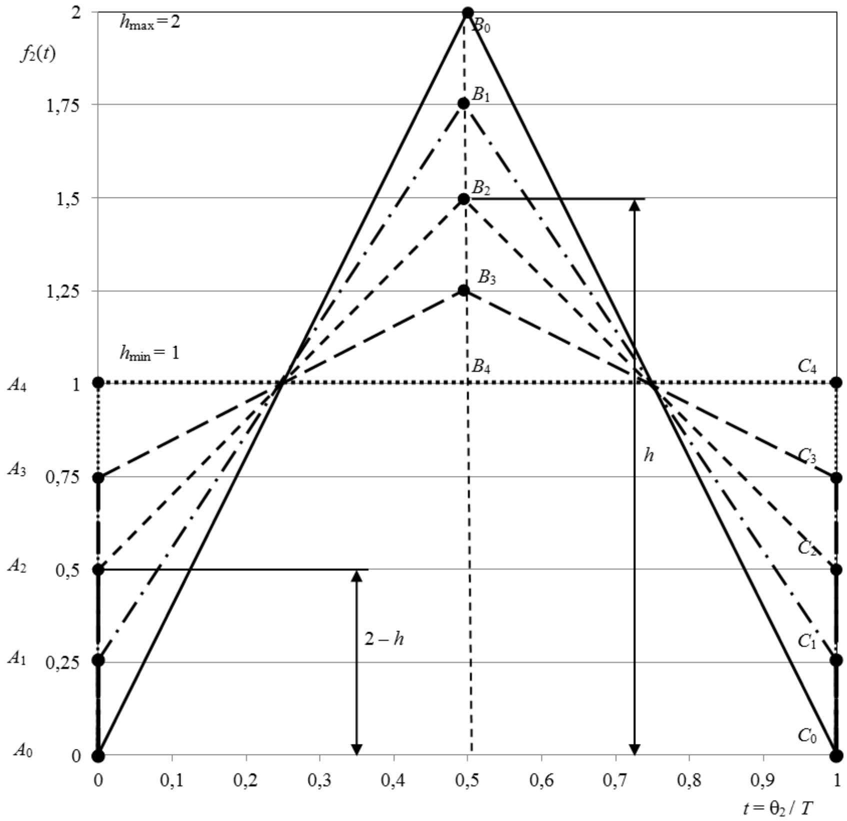
Source: Authoring

Рисунок 3

Семейство пятиугольных унимодальных, симметричных относительно минимакса функций плотности распределения вероятностей относительного сдвига поставок

Figure 3

Collection of pentagonal unimodal and symmetric with respect to minimax probability density functions of relative shift of deliveries



Источник: авторская разработка

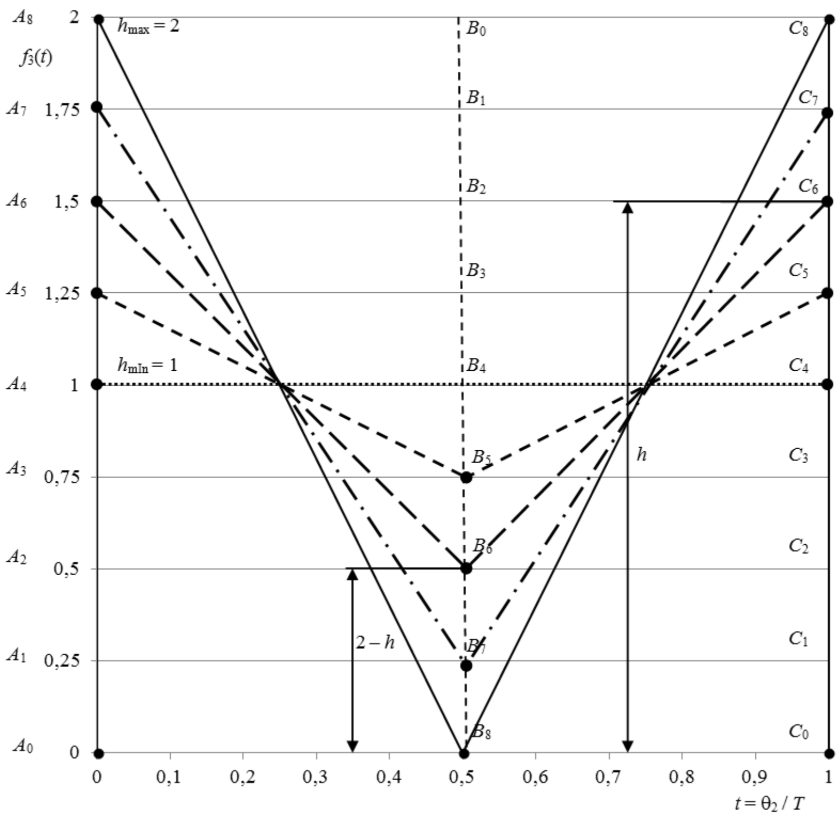
Source: Authoring

Рисунок 4

Семейство пятиугольных бимодальных с равными модами, симметричных относительно антимоды, расположенной на линии минимакса, функций плотности распределения вероятностей относительного сдвига поставок

Figure 4

Collection of pentagonal bimodal with equal modes and symmetric with respect to the antimode located on the minimax line probability density functions of relative shift of deliveries



Источник: авторская разработка

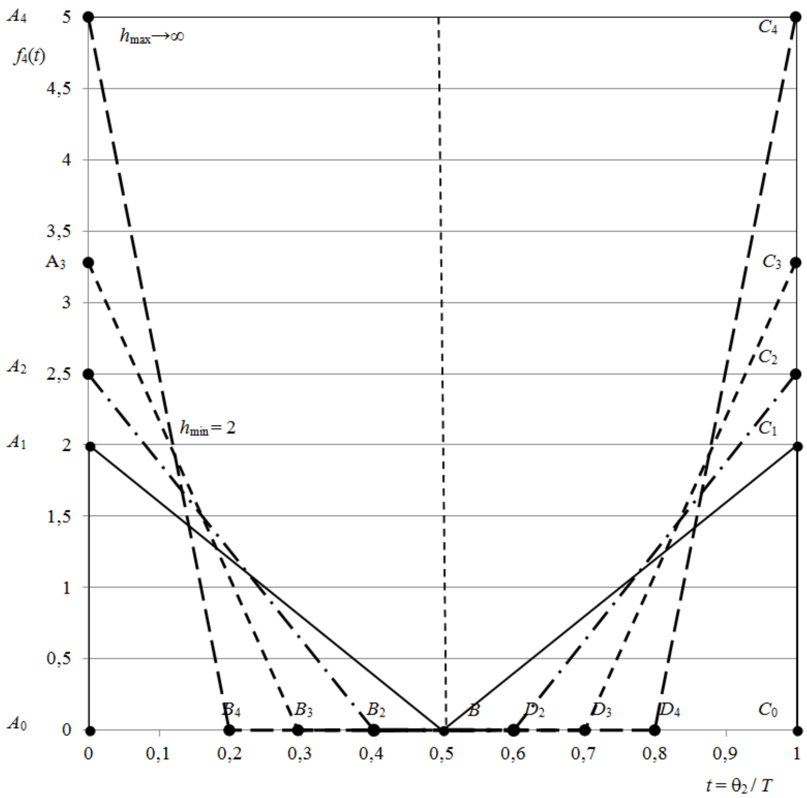
Source: Authoring

Рисунок 5

Семейство шестиугольных бимодальных с равными модами, симметричных относительно линии минимакса функций плотности распределения вероятностей относительного сдвига поставок

Figure 5

Collection of hexagonal bimodal with equal modes and symmetric with respect to the minimax line probability density functions of relative shift of deliveries



Источник: авторская разработка

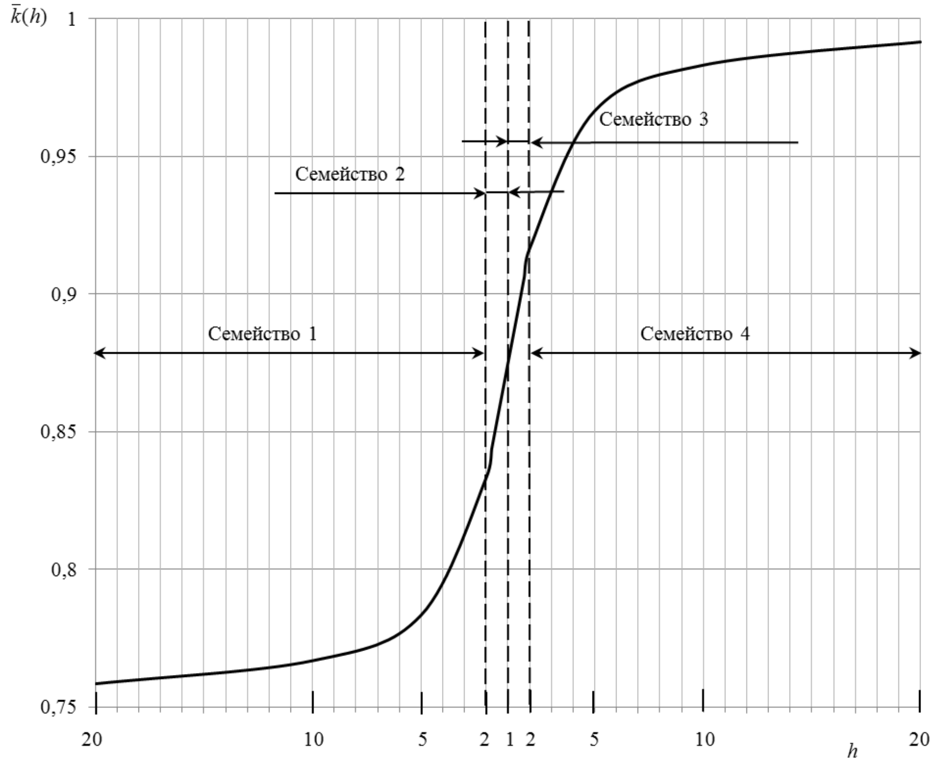
Source: Authoring

Рисунок 6

График зависимости математического ожидания нормировочного множителя *k*(*h*) от величины моды *h* в четырех семействах функций плотности распределения вероятностей относительного сдвига поставок

Figure 6

Dependency graph of expected value of normalization factor *k*(*h*) on the mode's value *h* in four collections of probability density functions of relative shift of deliveries



Источник: авторская разработка

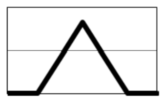
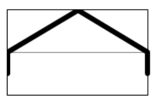
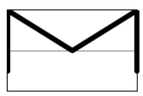
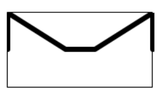
Source: Authoring

Рисунок 7

Основные параметры четырех семейств функций плотности распределения вероятностей относительного сдвига поставок в многопродуктовой модели поставок

Figure 7

Basic parameters of four collections of probability density functions of relative shift of deliveries in the multiproduct model of deliveries

Номер семейства функций	Характеристика	Характерный вид графика функций	Формула расчета математического ожидания нормировочного множителя	Мода распределения *h*	Математическое ожидание нормировочного множителя	Превышение над оптимальным (минимаксным) значением нормировочного множителя, %
1	Треугольное унимодальное, симметричное относительно минимакса распределение		$\bar{k}_1 = 0,75 + \frac{1}{6}\frac{1}{h}$, $2 \le h < \infty$	∞ 20 10 5 2	0,75 0,7583 0,7667 0,7833 0,8333	0 1,11 2,22 4,44 11,11
2	Пятиугольное унимодальное, симметричное относительно минимакса распределение		$\bar{k}_2 = \frac{11}{12} - \frac{1}{24}h$, $1 \le h \le 2$	2 1,75 1,5 1,25 1	0,8333 0,8438 0,8542 0,8646 0,875	11,11 12,5 13,89 15,28 16,67
3	Пятиугольное бимодальное с равными модами, симметричное относительно антимоды, расположенной на линии минимакса, распределение		$\bar{k}_3 = \frac{5}{6} + \frac{1}{24}h$, $1 \le h \le 2$	1 1,25 1,5 1,75 2	0,875 0,8854 0,8958 0,9063 0,9167	16,67 18,06 19,44 20,83 22,22
4	Шестиугольное бимодальное с равными модами, симметричное относительно линии минимакса распределение		$\bar{k}_4 = 1 - \frac{1}{6}\frac{1}{h}$, $2 \le h < \infty$	2 5 10 20 ∞	0,9167 0,9667 0,9833 0,9917 1	22,22 28,89 31,11 32,22 33,33

Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Список литературы

1. *Воробьева Н.И., Лукинский В.С., Лукинский В.В.* Модель оптимального размера заказа: анализ и пути дальнейшего развития // Логистика и управление цепями поставок. 2014. № 3. С. 42–53.

2. *Лукинский В., Замалетдинова Д.* Методы управления запасами: расчет показателей запаса для товарных групп, относящихся к редким событиям // Логистика. 2015. № 1. С. 28–33; № 2. С. 24–27.

3. *Хоботов Е.Н.* Управление многономенклатурными запасами с учетом производства продукции // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер.: Машиностроение. 2011. № 2. С. 109–127.

4. *Лукинский В., Воробьева Н.* Многономенклатурная модель оптимального размера заказа со скидками // Логистика. 2015. № 4. С. 54–59; № 5. С. 37–43.

5. *Бродецкий Г.Л.* Возможности приближенной оптимизации запасов с учетом временной ценности денег // Менеджмент качества. 2015. № 3. С. 190–199.

6. *Герами В., Шидловский И.* Поставки несколькими транспортными средствами при управлении запасами // РИСК: ресурсы, информация, снабжение, конкуренция. 2014. № 3. С. 66–71.

7. *Уразбахтин И.Р.* Прогнозирование динамики спроса на запасы промышленного предприятия с высокой степенью изменчивости // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. 2015. № 10. URL: http://uecs.ru/logistika/item/3768-2015-10-23-13-06-00

8. *Бигильдеева Т.Б., Сопко М.В.* Двухпериодная задача управления запасами торгового предприятия с высокой вариацией спроса // Логистика и управление цепями поставок. 2013. № 2. С. 78–86.

9. *Косоруков О.А., Свиридова О.А.* Учет неопределенности спроса при оптимизации системы управления запасами // Логистика. 2012. № 6. С. 12–13.

10. *Мандель А.С.* Управление многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Ч. I. Нормативная модель // Проблемы управления. 2011. № 6. С. 47–51.

11. *Мандель А.С.* Управление многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Ч. II. Создание страховых запасов // Проблемы управления. 2012. № 1. С. 42–46.

12. *Сопко М.В.* Задача управления однономенклатурными запасами торгового предприятия с неизвестными вероятностными характеристиками спроса // Логистика. 2012. № 3. С. 28–30.

13. *Кочетков И.И., Грейз Г.М*. Влияние размера заказа на выбор транспортного средства // Современное бизнес-пространство: актуальные проблемы и перспективы. 2014. № 2. С. 94–97.

14. *Погибельский А.Ю.* Многопродуктовая модель управления запасами с нечетко заданными начальными данными // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 7. С. 159–162.

15. *Бродецкий Г.Л., Мазунина О.А., Гловюк А.В.* Возможности повышения качества решений при оптимизации закупок по многим критериям // Логистика сегодня. 2015. № 4. С. 204–227.

16. *Вазиев Р.Р.* Методика использования оборотных средств промышленных предприятий при создании запасов // Аудит и финансовый анализ. 2009. № 4. С. 149–169.

17. *Носов А.Л.* Логистика запасов: оптимизация затрат // Концепт. 2015. № 7. С. 46–50. URL: http://e-koncept.ru/2015/15232.htm

18. *Тюрин А.Ю*. Скорость поставок и оборот капитала // Российское предпринимательство. 2010. № 1-2. С. 69–75.

19. *Чугунов Е.С., Захаров В.В*. Эвристический метод решения многопродуктовой задачи управления запасами // Информационно-управляющие системы. 2015. № 6. С. 105–111.

20. *Серая О.В., Клименко Т.А*. Методика получения оптимального плана закупок в многономенклатурной поставке // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2010. Т. 4. № 4. С. 40–43.

21. *Добронравин Е.Р.* Моделирование условий и конфигурации материального потока логистической системы на основе оптимальных норм материального запаса // Российское предпринимательство. 2011. № 10-1. С. 70–75.

22. *Белик И.С., Латфуллин Р.Р.* Управление производственными запасами вспомогательных производств металлургических холдингов в рамках управления стоимостью компании // Вестник УрФУ. Серия Экономика и управление. 2015. Т. 14. № 2. С. 41–59.

23. *Рыбникова В.А.* Организация управления запасами вспомогательных материалов на предприятиях металлургической отрасли // Организатор производства. 2008. № 1. С. 24–32.

24. *Кулакова Ю.Н.* Оценка нормировочного множителя в многопродуктовой модели управления запасами предприятия при условии равной периодичности и одинаковой стоимости поставок // Логистика и управление цепями поставок. 2012. № 3. С. 76–83.

25. *Букан Дж., Кенигсберг Э.* Научное управление запасами. М.: Наука, 1967. 424 с.

Информация о конфликте интересов

Мы, авторы данной статьи, со всей ответственностью заявляем о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи. Настоящее заявление относится к проведению научной работы, сбору и обработке данных, написанию и подготовке статьи, принятию решения о публикации рукописи.

ISSN 2311-8725 (Online)
ISSN 2073-039X (Print)

Mathematical Methods and Models

A MULTIPRODUCT INVENTORY CONTROL MODEL FOR SUPPLY OF TWO TYPES OF GOODS AT RANDOM INTERVAL BETWEEN DELIVERIES

Yuliya N. KULAKOVA[a,•], Andrei B. KULAKOV[b]

[a] Ural Social and Economic Institute (Branch) of Academy of Labor and Social Relations, Chelyabinsk, Russian Federation
Kulakova174@mail.ru

[b] Ural Social and Economic Institute (Branch) of Academy of Labor and Social Relations, Chelyabinsk, Russian Federation
Finansist_97@2074.ru

• Corresponding author

Article history:
Received 30 January 2017
Received in revised form
10 April 2017
Accepted 17 May 2017
Available online 28 June 2017

JEL classification: C51, C54, M21

https://doi.org/10.24891/ea.16.6.1152

Keywords: enterprise, inventory management, multiproduct model, optimization, normalization factor

Abstract
Subject The article considers a multiproduct inventory management model developed for supply of two types of goods of the same delivery value and random interval between deliveries.
Objectives The purpose is to evaluate the divergence of parameters of a model with random interval between deliveries from the parameters of optimal model for supply of two types of goods of the same delivery value and equal interval between deliveries.
Methods We developed an economic and mathematical model to control incoming inventory of the enterprise, which differs from existing multiproduct models as it considers the parameter of random interval between deliveries.
Results The model enables to evaluate the deviation of normalization factor, which determines the volume of current assets invested in inventory in the model with random interval between deliveries, from the optimum value of the normalization factor obtained in the event of observance of optimum delivery parameters. This helps evaluate unreasonable investment in current assets and excess expenses related to inventory management. The findings may be used by companies when planning the deliveries of purchased goods to define the most favorable terms of contracts with suppliers.
Conclusions The findings prove the economic expediency of meeting the optimum conditions of goods' delivery and assess the level of deviation from optimum parameters, if suppliers fail to meet the conditions.

Acknowledgments

We extend our sincere appreciation to Nikolai P. MESHKOVOI, Candidate of Engineering Sciences, Assistant Professor, for valuable advice and comments on the article.

The article is supported by the Publishing house FINANCE and CREDIT's Information center at the Ural Social and Economic Institute (Branch) of Academy of Labor and Social Relations.

References

1. Vorob'eva N.I., Lukinskii V.S., Lukinskii V.V. [A model for economic order quantity (EOQ): Analysis and further development]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2014, no. 3, pp. 42–53. (In Russ.)

2. Lukinskii V., Zamaletdinova D. [Inventory management methods: Calculation of stock indicators for product groups assigned to rare events]. *Logistika = Logistics*, 2015, no. 1, pp. 28–33; no. 2, pp. 24–27. (In Russ.)

3. Khobotov E.N. [Control over multiproduct inventory considering the manufacture of products]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Ser.: Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Mechanical Engineering*, 2011, no. 2, pp. 109–127. (In Russ.)

4. Lukinskii V., Vorob'eva N. [A multiproduct model of economic order quantity with discounts]. *Logistika = Logistics*, 2015, no. 4, pp. 54–59; no. 5, pp. 37–43. (In Russ.)

5. Brodetskii G.L. [Options for approximate optimization of inventory considering the time value of money]. *Menedzhment kachestva = Quality Management*, 2015, no. 3, pp. 190–199. (In Russ.)

6. Gerami V., Shidlovskii I. [Delivery by several vehicles in inventory management]. *RISK: resursy, informatsiya, snabzhenie, konkurentsiya = RISK: Resources, Information, Supply, Competition*, 2014, no. 3, pp. 66–71. (In Russ.)

7. Urazbakhtin I.R. [Forecasting the demand for reserves of industrial enterprise with high level of variation]. *Upravlenie ekonomicheskimi sistemami: elektronnyi nauchnyi zhurnal*, 2015, no. 10. (In Russ.) Available at: http://uecs.ru/logistika/item/3768-2015-10-23-13-06-00

8. Bigil'deeva T.B., Sopko M.V. [A two-period inventory control problem of commercial enterprise with high variation in demand]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2013, no. 2, pp. 78–86. (In Russ.)

9. Kosorukov O.A., Sviridova O.A. [Considering the uncertainty of demand in inventory management system optimization]. *Logistika = Logistics*, 2012, no. 6, pp. 12–13. (In Russ.)

10. Mandel' A.S. [Multi-product inventory control under uncertainty and instability. Part I: A normative model]. *Problemy upravleniya = Control Sciences*, 2011, no. 6, pp. 47–51. (In Russ.)

11. Mandel' A.S. [Multi-product inventory control under uncertainty and instability. Part II: Reserve stock creation]. *Problemy upravleniya = Control Sciences*, 2012, no. 1, pp. 42–46. (In Russ.)

12. Sopko M.V. [Monoprouct inventory control of a trading company with unknown probabilistic characteristics of demand]. *Logistika = Logistics*, 2012, no. 3, pp. 28–30. (In Russ.)

13. Kochetkov I.I., Greiz G.M. [The impact of order quantity on vehicle selection]. *Sovremennoe biznes-prostranstvo: aktual'nye problemy i perspektivy = Modern Business Space: Current Problems and Prospects*, 2014, no. 2, pp. 94–97. (In Russ.)

14. Pogibel'skii A.Yu. [A multiproduct inventory management model with fuzzy initial conditions]. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki = Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2011, no. 7, pp. 159–162. (In Russ.)

15. Brodetskii G.L., Mazunina O.A., Glovyuk A.V. [Opportunities to improve the quality of decisions in the multicriteria optimization of procurement]. *Logistika segodnya = Logistics Today*, 2015, no. 4, pp. 204–227. (In Russ.)

16. Vaziev R.R. [Techniques to use of current assets of industrial enterprises in inventory creation]. *Audit i finansovyi analiz = Audit and Financial Analysis*, 2009, no. 4, pp. 149–169. (In Russ.)

17. Nosov A.L. [Logistics of inventory: Cost optimization]. *Kontsept*, 2015, no. 7. (In Russ.) Available at: http://e-koncept.ru/2015/15232.htm

18. Tyurin A.Yu. [Effect of Transportation Services Scheme on Financial Performance of Enterprises of Food Industry]. *Rossiiskoe predprinimatel'stvo = Russian Journal of Entrepreneurship*, 2010, no. 1-2, pp. 69–75. (In Russ.)

19. Chugunov E.S., Zakharov V.V. [Heuristic Method for Solving Multi-Product Inventory Routing Problem]. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy = Information and Control Systems*, 2015, no. 6, pp. 105–111. (In Russ.)

20. Seraya O.V., Klimenko T.A. [A choice of optimization criterion in the problem of multiproduct inventory management]. *Vostochno-Evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnologii = Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2010, vol. 4, no. 4, pp. 40–43. (In Russ.)

21. Dobronravin E.R. [Simulation of environment and configuration of material flow of a logistics system based on optimal standards of inventory]. *Rossiiskoe predprinimatel'stvo = Russian Journal of Entrepreneurship*, 2011, no. 10-1, pp. 70–75. (In Russ.)

22. Belik I.S., Latfullin R.R. [Inventory management in subsidiary enterprises of metallurgical holding companies within value-based management]. *Vestnik UrFU. Seriya Ekonomika i upravlenie = Bulletin of Ural Federal University. Series Economics and Management*, 2015, vol. 14, no. 2, pp. 41–59. (In Russ.)

23. Rybnikova V.A. [Supporting materials inventory management in the metallurgical industry]. *Organizator proizvodstva = Organizer of Production*, 2008, no. 1, pp. 24–32. (In Russ.)

24. Kulakova Yu.N. [Evaluation of normalization factor behavior in a multiproduct inventory model under the condition of equal frequency and the same value of delivery]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2012, no. 3, pp. 76–83. (In Russ.)

25. Buchan J., Koenigsberg E. *Nauchnoe upravlenie zapasami* [Scientific Inventory Management]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 424 p.

Conflict-of-interest notification

We, the authors of this article, bindingly and explicitly declare of the partial and total lack of actual or potential conflict of interest with any other third party whatsoever, which may arise as a result of the publication of this article. This statement relates to the study, data collection and interpretation, writing and preparation of the article, and the decision to submit the manuscript for publication.