ISSN 2311-8725 (Online)
ISSN 2073-039X (Print)

Математические методы и модели

ТРЕХПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ СО СЛУЧАЙНЫМ СПРОСОМ

Артур Александрович МИЦЕЛЬ[a], Людмила Георгиевна СТАВЧУК[b,•]

[a] доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики,
Национальный исследовательский Томский политехнический университет;
профессор кафедры автоматизированных систем управления,
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,
Томск, Российская Федерация
maa@asu.tusur.ru

[b] студентка магистратуры физико-технического института,
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Томск, Российская Федерация
lyusbk93@gmail.com

• Ответственный автор

История статьи:
Принята 26.08.2016
Принята в доработанном виде 27.12.2016
Одобрена 17.01.2017
Доступна онлайн 29.03.2017

УДК 658.153
JEL: C61

Ключевые слова: логистика, управление запасами, стохастические модели, случайный спрос

Аннотация

Предмет. Система управления запасами – это сложный комплекс мероприятий по созданию и пополнению запасов, организации непрерывного контроля и оперативного планирования поставок, который направлен на обеспечение бесперебойного процесса производства и реализации продукции при минимизации издержек на обслуживание запасов. Предлагается стохастическая модель, реализация которой предполагает значительную экономию средств на создание запасов за счет того, что докупка необходимых ресурсов осуществляется в объеме их дефицита. Это позволяет сократить расходы на хранение неиспользованных ресурсов.

Цели. Получение трехпродуктовой модели управления запасами со случайным спросом с равной периодичностью поставок с минимальным оборотным капиталом.

Методология. При построении модели предполагается, что в начальный момент времени первый продукт закупается полностью, а остальные – частично, в последующем докупаются в течение всего цикла. Объем поставок произвольный, периодичность поставок всех ресурсов одинакова, но при этом спрос на продукцию является случайной величиной.

Результаты. Построена трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом с равной периодичностью поставок при условии, что ресурсы пополняются в размере дефицита данного ресурса. Проведено моделирование на основе данных по приходу сырья и материалов на предприятии ТОО «СП ВГ-Пласт».

Выводы. Предложенная методология построения модели управления запасами со случайным спросом позволяет получить аналитическую модель только при условии, что закупается не более трех ресурсов в течение цикла. Однако при построении трехмерной модели возникают погрешности за счет пренебрежения слагаемыми, средние значения которых не поддаются аналитическому вычислению. Предложенная трехпродуктовая модель позволяет сэкономить до 40,8% оборотных средств.

Введение

Главной задачей управления запасами является минимизация издержек, что позволяет вести предприятиям наиболее эффективную и выгодную деятельность. Уже создано множество различных стохастических моделей управления запасами, которые в той или иной мере позволяют оптимизировать деятельность предприятия. Основные положения теории управления запасами представлены в монографии Д. Букана и Э. Кенигсберга «Научное управление запасами» [1].

В работе [2] авторы условно разделяют модели управления запасами на одноэтапные и многоэтапные. Одноэтапные модели применяются в основном торговыми предприятиями, функционирование которых имеет сезонный характер, и поэтому одна закупка товара производится один раз у единственного поставщика с определенными условиями поставки, другая же закупка – у другого конкретного поставщика. Многоэтапные модели используются при прямо противоположных ситуациях, когда на каждом этапе закупается каждый товар с разными условиями покупки. Поэтому многоэтапные модели более актуальны в современных рыночных условиях, так как один и тот же товар предлагается множеством поставщиков. Однако модель, предложенная в работе [2], ограничивается тем, что товар нельзя заказать у нескольких поставщиков одновременно на одном этапе. Также стоит отметить, что для повышения оперативности принятия решения необходим многократный запуск процедуры поиска эффективного решения.

В работах [2–5] выделяют следующую структуру затрат:

- затраты на приобретение запасов;
- затраты на размещение заказа;
- затраты на хранение запасов;
- потери от дефицита запасов.

Также стоит отметить, что выделяют несколько видов решения поставленной задачи и связано это прежде всего с наличием случайного спроса.

Наиболее популярными являются модели с прогнозируемым спросом [4, 6–8].

В работах [3, 6] О.А. Косоруков и О.А. Свиридова предлагают стохастическую модель, которая основана на принципе сбалансированности издержек компании различного характера. Здесь также учитывается неопределенность не только относительно спроса, но и времени доставки товара. Работа [6] нацелена на определение момента времени поставки заказа, что позволит поддерживать запасы на оптимальном уровне и снизить затраты на хранение и потери от дефицита товара. Данная модель учитывает неопределенность спроса, при этом рассматривается случай, когда заказ приходит точно в срок.

Отдельный вид модели управления запасами, который основывается на предположении о получении дополнительной прибыли с помощью оптимизации ассортиментного набора товаров, сформулирован в работе [8]. Спрос и остатки товарных запасов здесь также являются случайными величинами. Стоит отметить, что в случае нестационарности спроса производится разделение прогнозируемого периода времени на несколько интервалов, в которых выполняется условие стационарности.

Когда нет достаточного количества данных о спросе, для построения прогноза используется другой метод. В таком случае прогноз формируется в рамках экспертно-статистического подхода, то есть эксперты за неимением значительной базы данных строят прогнозы, основываясь на имеющихся представлениях об аналогичных процессах и объектах.

В работе [4] авторами используется база данных по истории продаж нескольких тысяч видов товаров, многие из которых относятся к группе товаров ажиотажного спроса. Для прогноза значений временного ряда в данной работе предлагается адаптивный метод.

Нельзя не рассмотреть работы [9, 10]. В них описывается задача управления многономенклатурными запасами в условиях возможной нестационарности спроса, при этом неизвестны его статистические характеристики. В то же время есть информация о наблюдениях за изменением уровня спроса на товары. В первую очередь автор предлагает выделить тренды изменения спроса, затем классифицировать товары по ABC-методу. Для прогнозирования автор использует экспертно-статистический подход (метод аналогов). В итоге решается детерминированная многономенклатурная задача управления запасами.

В работе [10] исследуется проблема формирования дополнительных заказов на пополнение запасов. Автор предлагает на этапе создания страховых запасов использовать критерии, связанные с обеспечением заданного уровня обслуживания потребителей на каждом шаге периода планирования.

Работа [11] интересна тем, что схема решения строится для случайного времени задержки и случайного спроса в рамках (s, S)-стратегии. Суть стратегии состоит в том, что величина запаса y после удовлетворения требования каждый раз сравнивается с уровнем s и при $s > y$ производится заказ в размере $(S - y)$. Таким образом, ставится задача определения оптимальных уровней s, S для случайной задержки и случайного спроса. Решение задачи производится на основе адаптивного метода, а оптимальные уровни s, S определяются из условия минимума среднеквадратичного отклонения текущих затрат от искомых оптимальных. Также такой метод используется и в зарубежных источниках [12, 13].

Еще один критерий оптимизации предлагают авторы работы [14]. В качестве такого критерия здесь используется средняя прибыль компании от реализации закупленного товара в зависимости от изменения спроса на товар. Таким образом, для решения задачи многономенклатурного заказа необходимо максимизировать среднюю чистую прибыль. Этот критерий отличается от традиционных тем, что необходимо минимизировать не потери, а максимизировать среднюю прибыль с учетом издержек предприятия на создание запаса.

В работе [5] Ю.А. Козак и Р.В. Колчин предлагают модель, которая учитывает стохастичность спроса, однако здесь предполагается, что за период работы системы спрос у потребителя удовлетворяется разово. К минусам этой модели можно отнести то, что нельзя учесть наличие нескольких уровней складов, очередность обеспечения потребителей (очередность обеспечивается решением установленного лица), а также потери материальных ресурсов при доставке и хранении запасов.

При решении задачи управления запасами может возникнуть ряд ограничений, которые необходимо учесть. Авторы работы [15] рассматривают эту задачу с учетом ограничений по предложению и спросу, по емкости склада и пр. Одним из ограничений при решении задачи управления запасами может стать размер капитала [1]. Такое ограничение означает, что стоимость всех ресурсов не может быть больше суммы Y_m. По этой причине в работе [1] вводится нормировочный множитель K, который равен отношению максимума суммарной стоимости ресурсов к сумме их максимальных стоимостей. Также задача управления запасами при ограниченном размере капитала и исследование нормировочного множителя K рассматриваются и в других работах[1] [16].

В работе [17] описываются результаты развития теоретических и практических методов решения задачи. Автор работы заостряет внимание на том, что нет какого-либо универсального метода решения задачи в условиях неопределенности спроса, и утверждает, что проблема управления запасами в условиях нестационарности остается актуальной, так как без проведения дополнительных экспериментальных исследований нельзя утверждать, что относительно простые модели и алгоритмы могут адекватно описывать реальные процессы управления запасами.

В нашей работе ставится целью построить еще один вариант модели со случайным спросом, в которой недостающие ресурсы пополняются в размере дефицита данного ресурса. Предполагается, что эта модель позволит значительно сэкономить средства на создание запасов.

Постановка задачи

Предприятие закупает три вида ресурсов. Объем первого ресурса составляет   в натуральных единицах, стоимость единицы ресурса составляет d_1 ден. ед.; объем второго ресурса и цена составляют q_2 и d_2 соответственно; объем третьего ресурса и цена составляют q_3 и d_3 соответственно. Периоды использования каждого вида ресурса (цикл) примем одинаковыми и равными: $T_1 = T_2 = T_3 = T$. Объем средств на покупку ресурсов ограничен величиной $Y_m \le d_1q_1 + d_2q_2 + d_3q_3$. Будем для определенности полагать, что первый ресурс закупается в начале периода полностью, второй ресурс – частично, в объеме k_2q_2, где $k_2 \le 1$ – доля второго ресурса, а третий ресурс – частично, в объеме k_3q_3, где где $k_3 \le 1$ – доля третьего ресурса. Тогда

$$d_1q_1 + k_2d_2q_2 + k_3d_3q_3 = Y_m.$$

В отличие от модели, предложенной в более ранней публикации[2], будем полагать, что расход ресурсов представляет собой случайные процессы и подчиняется стохастическим уравнениям:

$$\begin{aligned} dq_1 &= \mu_1 dt + \sigma_1 dw; \\ dq_2 &= \mu_2 dt + \sigma_2 dw; \\ dq_3 &= \mu_3 dt + \sigma_3 dw. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь μ_1, μ_2, μ_3 – средние значения в единицу времени случайных величин x_1, x_2, x_3 (средняя скорость расхода $\mu_1 = q_1 / T$, $\mu_2 = q_2 / T$, $\mu_3 = q_3 / T$); $б_1$, $б_2$, $б_3$ – дисперсии в единицу времени случайных величин x_1, x_2, x_3 соответственно (размерность q^2 / T); dw – стандартный винеровский процесс.

Решения уравнений (1) имеют вид [18]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mu_1 t + \sigma_1 \sqrt{t} \cdot \varepsilon; \\ x_2(t) &= \mu_2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \cdot \varepsilon; \\ x_3(t) &= \mu_3 t + \sigma_3 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

где ε – стандартная нормальная случайная величина с параметрами $M(\varepsilon) = 0$, $M(\varepsilon^2) = 1$.

При $t_0 = 0$ получим решение: $x_1(t_0) = 0$; $x_2(t_0) = 0$; $x_3(t_0) = 0$.

[1] *Кулаков А.Б., Кулакова Ю.Н.* Многопродуктовая модель управления запасами предприятия с поставками равной периодичности // Экономический анализ: теория и практика. 2013. № 29. С. 58–62.

[2] *Мицель А.А., Алимханова Д.А.* Многопродуктовая модель управления запасами с равной периодичностью поставок // Экономический анализ: теория и практика. 2015. № 40. С. 55–66.

Моменты времени t_2 и t_3 пополнения второго ресурса до величины q_2 (1 – k_2) и третьего ресурса до величины q_3 (1 – k_3) найдем из следующих условий:

$$d_1x_1(t_2)+d_2x_2(t_2)+d_3x_3(t_2)=a_2\left(1-k_2\right)+a_3\left(1-k_3\right);$$

$$d_1x_1(t_3)+d_2x_2(t_3)+d_3x_3(t_3)=a_3\left(1-k_3\right),$$

где k_2 – доля второго ресурса в начальный момент времени;

k_3 – доля третьего ресурса в начальный момент времени;

a_2 (1 – k_2) – дефицит второго ресурса в стоимостном выражении;

a_3 (1 – k_3) – дефицит третьего ресурса в стоимостном выражении.

В результате получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}&bt_2+c\varepsilon\sqrt{t_2}=a_2\left(1-k_2\right)+a_3\left(1-k_3\right);\\&bt_3+c\varepsilon\sqrt{t_3}=a_3\left(1-k_3\right),\end{aligned}\qquad(2)$$

где $a=a_1+a_2+a_3$; $a_1=d_1q_1$, $a_2=d_2q_2$, $a_3=d_3q_3$;

$b=b_1+b_2+b_3$; $b_1=d_1\mu_1$, $b_2=d_2\mu_2$, $b_3=d_3\mu_3$;

$c=c_1+c_2+c_3$; $c_1=d_1\sigma_1$, $c_2=c_2\sigma_2$, $c_3=d_3\sigma_3$.

Запишем условия бездефицитности второго и третьего ресурсов: $k_2a_2=d_2x_2(t_2)$; $k_3a_3=d_3x_3(t_3)$.

Тогда моменты докупки второго и третьего ресурсов будем искать из решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned}&bt_2+c\varepsilon\sqrt{t_2}=a_2\left(1-k_2\right)+a_3\left(1-k_3\right);\\&k_2a_2=b_2t_2+c_2\varepsilon\sqrt{t_2};\\&bt_3+c\varepsilon\sqrt{t_3}=a_3\left(1-k_3\right);\\&k_3a_3=b_3t_3+c_3\varepsilon\sqrt{t_3}.\end{aligned}\qquad(3)$$

Определение моментов времени докупки второго и третьего ресурсов и их долей в начальный момент времени

Найдем момент времени t_3 докупки третьего ресурса и его долю в начальный момент времени k_3 из третьего и четвертого уравнений системы (3):

$$t_3=\frac{a_3}{b+b_3}+\frac{\left(c+c_3\right)^2\varepsilon^2}{2\left(b+b_3\right)^2}-\frac{\left(c+c_3\right)\varepsilon}{2\left(b+b_3\right)^2}\times$$
$$\times\sqrt{\left(c+c_3\right)^2\varepsilon^2+4a_3\left(b+b_3\right)};$$

$$k_3=\frac{b_3}{b+b_3}+\frac{\left(c+c_3\right)\left(b_3c-bc_3\right)}{2a_3\left(b+b_3\right)^2}\varepsilon^2-$$
$$-\left(\frac{b_3c-bc_3}{2a_3\left(b+b_3\right)^2}\right)\varepsilon\sqrt{\left(c+c_3\right)^2\varepsilon^2+4a_3\left(b+b_3\right)}.$$

Найдем момент t_2 докупки второго ресурса и его долю в начальный момент времени k_2 из первого и второго уравнений системы (3):

$$t_2=\frac{a_2+a_3\left(1-k_3\right)}{b+b_2}+\frac{\left(c+c_2\right)^2\varepsilon^2}{2\left(b+b_2\right)^2}-$$
$$-\frac{\left(c+c_2\right)\varepsilon}{2\left(b+b_2\right)^2}\sqrt{\left(c+c_2\right)^2\varepsilon^2+4\left(a_2+a_3\left(1-k_3\right)\right)\left(b+b_2\right)};$$

$$k_2=\frac{a_2+a_3\left(1-k_3\right)}{a_2\left(b+b_2\right)}b_2+\frac{\left(c+c_2\right)\left(b_2c-bc_2\right)}{2a_2\left(b+b_2\right)^2}\varepsilon^2-$$
$$-\left(\frac{b_2c-bc_2}{2a_2\left(b+b_2\right)^2}\right)\varepsilon\sqrt{\left(c+c_2\right)^2\varepsilon^2+4\left(a_2+a_3\left(1-k_3\right)\right)\left(b+b_2\right)}.$$

Минимально необходимый запас оборотных средств составит:

$$Y_m=a_1+a_2k_2+a_3k_3=a_1+\frac{a_2+a_3\left(1-k_3\right)}{\left(b+b_2\right)}b_2+$$
$$+\frac{\left(c+c_2\right)\left(b_2c-bc_2\right)}{2\left(b+b_2\right)^2}\varepsilon^2-\left(\frac{b_2c-bc_2}{2\left(b+b_2\right)^2}\right)\times$$
$$\times\varepsilon\sqrt{\left(c+c_2\right)^2\varepsilon^2+4\left(a_2+a_3\left(1-k_3\right)\right)\left(b+b_2\right)}+$$
$$+\frac{a_3b_3}{b+b_3}+\frac{\left(c+c_3\right)\left(b_3c-bc_3\right)}{2\left(b+b_3\right)^2}\varepsilon^2-\left(\frac{b_3c-bc_3}{2\left(b+b_3\right)^2}\right)\times$$
$$\times\varepsilon\sqrt{\left(c+c_3\right)^2\varepsilon^2+4a_3\left(b+b_3\right)}.$$

Вычисление характеристик случайных величин

Вычислим характеристики случайной величины t_3:

$$M(t_3)=\frac{a_3}{b+b_3}+\frac{\left(c+c_3\right)^2}{2\left(b+b_3\right)^2}=\frac{d_3q_3}{\left(d_1\mu_1+d_2\mu_2+2d_3\mu_3\right)}+$$
$$+\frac{\left(d_1\sigma_1+d_2\sigma_2+2d_3\sigma_3\right)^2}{2\left(d_1\mu_1+d_2\mu_2+2d_3\mu_3\right)^2}.$$

Дисперсия случайной величины t_3 составит:

$$D(t_3)=\frac{\left(c+c_3\right)^2}{4\left(b+b_3\right)^4}\left(5\left(c+c_3\right)^2+4\left(b+b_3\right)a_3\right).$$

При проведении усреднения величины t_3 по переменной ε было учтено, что выражение

$$\varphi(\varepsilon)=\varepsilon\sqrt{((c+c_3)\varepsilon)^2+4(b+b_3)a_3}$$

представляет собой нечетную функцию по переменной ε, поэтому $\int\varphi(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon=0$. Здесь $f(\varepsilon)$ – плотность вероятности случайной величины ε. Кроме того $M(\varepsilon)=0$, $M(\varepsilon^2)=0$.

При проведении усреднения величины $(t_3 - M(t_3))^2$ по переменной ε было учтено, что выражение

$$\varphi(\varepsilon)=\varepsilon(\varepsilon^2-1)\sqrt{((c+c_3)\varepsilon)^2+4(b+b_3)a_3}$$

также представляет собой нечетную функцию по переменной ε, поэтому $\int\varphi(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon=0$.

Найдем характеристики случайной величины t_2:

$$M(t_2)=\frac{a_2+a_3(1-k_3)}{b+b_2}+\frac{(c+c_2)^2}{2(b+b_2)^2}=\frac{a_2+a_3(1-k_3)}{b_1+2b_2+b_3}+\frac{(c_1+2c_2+c_3)^2}{2(b_1+2b_2+b_3)^2}. \quad (4)$$

При проведении операции усреднения мы пренебрегли слагаемым

$$M\left(-\frac{(c+c_2)\varepsilon}{2(b+b_2)^2}\sqrt{(c+c_2)^2\varepsilon^2+4(a_2+a_3(1-k_3))(b+b_2)}\right).$$

При этом погрешность формулы (4) может колебаться в интервале от 0 до 8,26%.

Дисперсия случайной величины t_2 составит:

$$D(t_2)=\frac{(c+c_2)^2}{4(b+b_2)^2}\left(5(c+c_2)^2+(a_2+a_3(1-k_3))(b+b_2)\right).$$

В данном случае при проведении операции усреднения также было исключено слагаемое, для которого невозможно вычислить среднее значение аналитически. В результате полученное решение имеет погрешность, колеблющуюся в интервале от 0 до 19,94%.

Найдем характеристики случайной величины Y_m:

$$M(Y_m)=a_1+a_2M(k_2)+a_3M(k_3). \quad (5)$$

Из формулы (5) видно, что для получения характеристик случайной величины Y_m необходимо найти характеристики величин k_2 и k_3:

$$M(k_3)=\frac{b_3}{b+b_3}+\frac{(c+c_3)(b_3c-bc_3)}{2a_3(b+b_3)^2};$$

$$M(k_2)=\frac{a_2+a_3(1-k_3)}{a_2(b+b_2)}b_2+\frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)}{2a_2(b+b_2)^2}.$$

Таким образом, среднее значение минимально необходимого запаса оборотных средств Y_m составит:

$$M(Y_m)=a_1+\frac{a_2+a_3(1-k_3)}{(b+b_2)}b_2+\frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)}{2(b+b_2)^2}+a_3\frac{b_3}{b+b_3}+\frac{(c+c_3)(b_3c-bc_3)}{2(b+b_3)^2}.$$

Однако в данном случае стоит учитывать погрешность, полученную в результате операции усреднения случайной величины k_2, которая может колебаться в интервале от 0 до 4,25%.

Найдем дисперсию Y_m:

$$D(Y_m)=a_2^2D(k_2)+a_3^2D(k_3)+2a_2a_3\left[M(k_2k_3)-M(k_2)M(k_3)\right],$$

где $D(k_2)=\dfrac{(b_2c-bc_2)^2}{4a_2^2(b+b_2)^4}\times\left(5(c+c_2)^2+4(a_2+a_3(1-k_3))(b+b_2)\right);$

$$D(k_3)=\frac{(b_3c-bc_3)^2}{4a_3^2(b+b_3)^4}\times\left(5(c+c_3)^2+4a_3(b+b_3)\right);$$

$$M(k_2k_3)=\frac{a_2+a_3(1-k_3)}{a_2(b+b_2)}\frac{b_2b_3}{b+b_3}+\frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)}{2a_2(b+b_2)^2}\frac{b_3}{b+b_3}+\frac{a_2+a_3(1-k_3)}{a_2(b+b_2)}b_2\frac{(c+c_3)(b_3c-bc_3)}{2a_3(b+b_3)^2}+3\frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)}{2a_2(b+b_2)^2}\frac{(c+c_3)(b_3c-bc_3)}{2a_3(b+b_3)^2}.$$

Погрешность вычислений в результате составит 21,16% в худшем случае.

Вычислим момент окончания цикла t_c для случая, когда все ресурсы расходуются одновременно в одинаковой пропорции. Уравнение (2) примет следующий вид:

$$bt_c + c\varepsilon\sqrt{t_c} = Y_\Sigma,$$

где $Y_\Sigma = d_1q_1 + d_2q_2 + d_3q_3$ – суммарный запас ресурсов.

Решим его и вычислим характеристики:

$$t_c = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2}\sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma} = $$

$$= T + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2}\sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma};$$

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{c^2}{2b^2} =$$

$$= T + \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2}{2(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)^2};$$

$$D(t_c) = \frac{c^2}{4b^4}\left(5c^2 + 4bY_\Sigma\right) = \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2}{4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)^4} \times$$

$$\times\left(5(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2 + 4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)Y_\Sigma\right).$$

Таким образом, получены аналитически средние значения и стандартные отклонения моментов пополнения второго и третьего ресурсов:

$$M(t_2) = \frac{a_2 + a_3(1-k_3)}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)^2}{2(b+b_2)^2};$$

$$M(t_3) = \frac{a_3}{b+b_3} + \frac{(c+c_3)^2}{2(b+b_3)^2};$$

$$\sqrt{D(t_2)} = \sqrt{\frac{(c+c_2)^2}{4(b+b_2)^2}\left(5(c+c_2)^2 + (a_2 + a_3(1-k_3))(b+b_2)\right)};$$

$$\sqrt{D(t_3)} = \sqrt{\frac{(c+c_3)^2}{4(b+b_3)^4}\left(5(c+c_3)^2 + 4(b+b_3)a_3\right)},$$

а также среднее значение и стандартное отклонение момента пополнения запасов ресурсов (момента окончания цикла):

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2};$$

$$\sqrt{D(t_c)} = \frac{c}{2b^2}\sqrt{(5c^2 + 4bY_\Sigma)}.$$

Среднее значение нормировочного множителя $K_m = Y_m / Y_\Sigma$:

$$M(K_m) = \frac{M(Y_m)}{Y_\Sigma} = \frac{M(Y_m)}{a}.$$

При отсутствии случайности в полученных формулах величины c_1, c_2, c_3 будут равны нулю, так как дисперсии σ1, σ2, σ3 равны нулю. Поэтому полученные выражения для средних значений величин t_2, t_3, k_2, k_3, t_c, Y_m будут совпадать с формулами, полученными ранее[3] для детерминированной модели, а дисперсии этих величин будут равны нулю. Этот факт можно рассматривать как подтверждение адекватности полученной модели управления запасами со случайным спросом.

Моделирование на реальных данных

В качестве исходных данных использованы данные по приходу сырья и материалов на предприятии ТОО «СП ВГ-Пласт» за июнь 2014 г. Выпускаемая продукция – изделия из ПВХ: подоконная доска, стеновые панели и пр.

Данные по запасам сырья и материалов в июне 2014 г. представлены в *табл. 1*.

Рассчитаем затрачиваемые оборотные средства для случая, когда закупаются три вида ресурсов, представленных в *табл. 1*. Полагаем, что в начале цикла первый ресурс закупается полностью, а второй и третий ресурсы – частично, кроме того, считаем $a_1 > a_2 > a_3$ (см. последний столбец *табл. 1*). Предположим, что все ресурсы расходуются случайным образом.

Реальные оборотные средства на создание запасов и минимально необходимые средства представлены в *табл. 2*. Здесь же приведено среднее значение нормировочного множителя $M(K_m)$. Эта величина определяет выгоду в процентах на создание запаса оборотных средств. Здесь под выгодой понимается уменьшение необходимого объема оборотных средств на 40,8% по сравнению с тем, если бы закупка всех трех ресурсов производилась в начале производственного цикла.

Таким образом, согласно модели первый ресурс следует закупить в полном объеме в начале периода, а второй и третий – в объемах $k_2 = 0{,}408$ и $k_3 = 0{,}202$ соответственно. Тогда момент времени докупки второго ресурса при условии дефицита оборотных средств в начале цикла $t_2 = 12$ дней, а момент времени докупки третьего ресурса – $t_3 = 6$ дней. Полученные результаты представлены на *рис. 1*.

[3] *Мицель А.А., Алимханова Д.А.* Многопродуктовая модель управления запасами с равной периодичностью поставок // Экономический анализ: теория и практика. 2015. № 40. С. 55–66.

В начальный момент времени первый ресурс закупается полностью в объеме 11 827 160 ден. ед, второй ресурс – в объеме 4 175 555,23 ден. ед., а третий – в объеме 1 516 187,36 ден. ед. В момент времени $t_3 = 6$ докупается только третий ресурс в объеме 5 989 690,64 ден. ед. В последний момент времени $t_2 = 12$ докупается второй ресурс в объеме 6 058 648,77 ден. ед. То есть при использовании модели затраты на покупку ресурсов в начальный момент времени составляют 17 518 902,59 ден. ед., тогда как при единовременной покупке (*рис. 2*) затраты составят 29 567 242 ден. ед.

Заключение

Предложенная модель была построена при условии, что ресурсы пополняются в размере дефицита данного ресурса, кроме того, спрос на продукцию имеет случайный характер, а периодичность поставок всех ресурсов одинакова.

По полученной модели можно сделать следующие выводы.

В отличие от случая, когда в обороте участвуют два ресурса, трехпродуктовая модель может быть построена либо с использованием численных методов (алгоритмическая модель), либо аналитически, но с некоторыми погрешностями. Максимальная погрешность построенной аналитической модели составляет 21,16%. Это является минусом модели, так как невозможно получить точные значения характеристик случайных величин. Следствием чего невозможность построения аналитической многопродуктовой модели (количество ресурсов больше трех), так как при увеличении количества ресурсов ошибка будет накапливаться. При моделировании на реальных данных было выявлено, что выгода при использовании построенной трехпродуктовой модели составляет 40,8%, когда закупаются три вида ресурсов.

Однако положительным моментом является то, что данные модели позволяют поддерживать безостановочный график поставок предприятиями-поставщиками.

Таблица 1

Данные по приходу сырья и материалов

Table 1

Data on the arrival of materials and supplies

Наименование	Количество, кг	Сумма, ден. ед.
Аддетивы	17 900	11 827 160
ПВХ микросуспензионный	58 000	10 234 204
Мел гидрофобный	201 915	7 505 878

Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Таблица 2

Оборотные средства на создание запасов

Table 2

Working capital for stocking

Показатель	Значение
Реально затраченные средства, ден. ед.	29 567 242
Минимально необходимые средства, ден. ед.	17 518 902,59
Выгода, %	40,8

Источник: авторская разработка

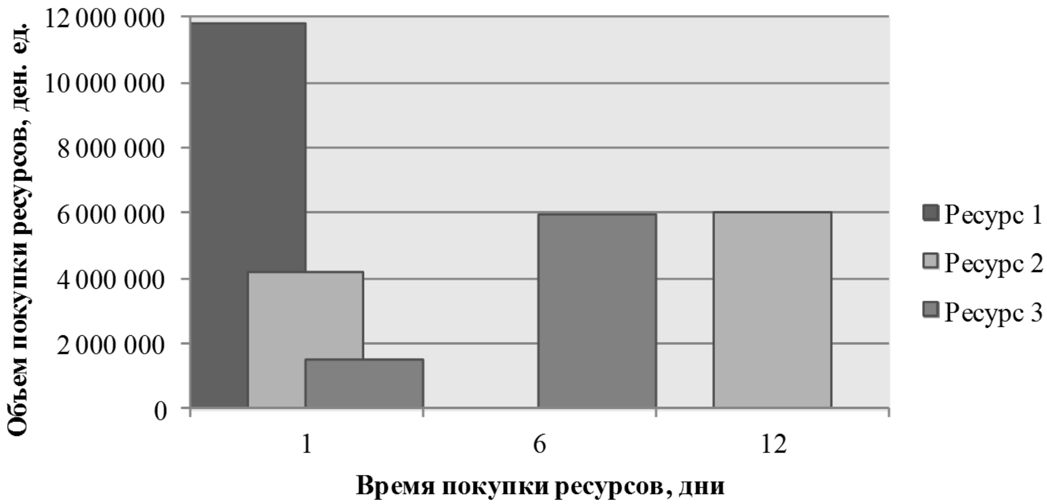
Source: Authoring

Рисунок 1

Объемы покупки ресурсов при использовании модели

Figure 1

Volumes of resource purchase when using the model



Источник: авторская разработка

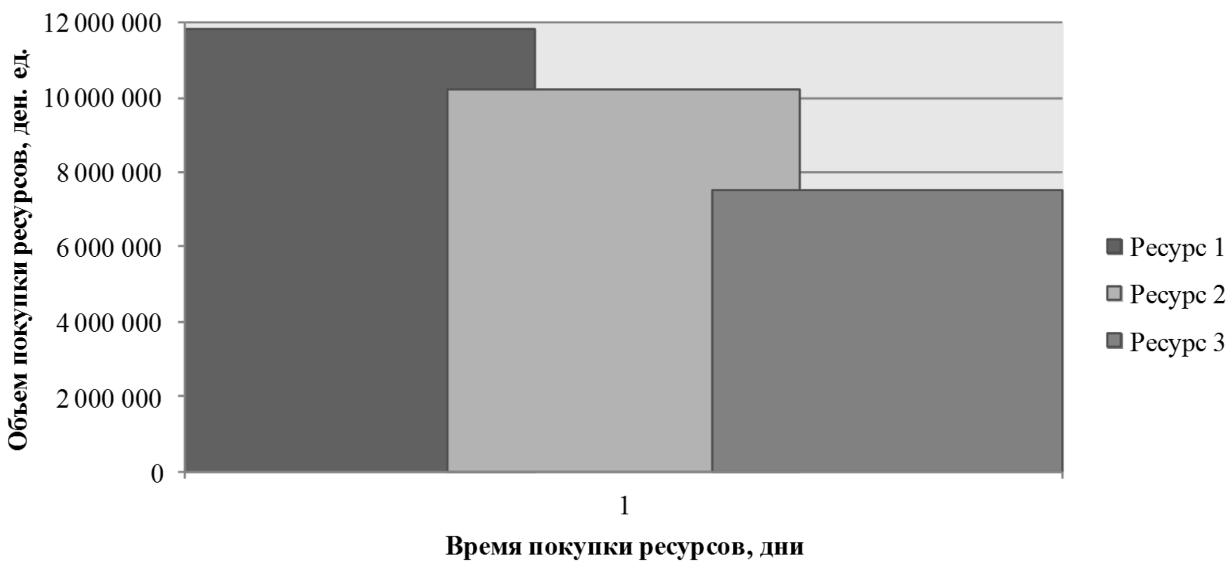
Source: Authoring

Рисунок 2

Объемы ресурсов при единовременной закупке

Figure 2

Volume of resources in the event of one-off purchase



Источник: авторская разработка

Source: Authoring

Список литературы

1. *Букан Д., Кенигсберг Э.* Научное управление запасами. М.: Наука, 1967. 423 с.

2. *Кузнецов Д.Н., Толстых С.С.* Стохастическая модель многоэтапного управления многопродуктовыми запасами // Управление общественными и экономическими системами. 2007. № 1. URL: http://umc.gu-unpk.ru/umc/arhiv/2007/1/Kuznetsov_Tolstih.pdf.

3. *Свиридова О.А.* Детерминированная и стохастическая модели минимизации издержек в системах управления запасами // Логистика. 2011. № 4. С. 28–30.

4. *Беляков А.Г., Лапин А.В., Мандель А.С.* Управление запасами товаров ажиотажного спроса // Проблемы управления. 2005. № 6. С. 40–45.

5. *Козак Ю.А., Колчин Р.В.* Математическое обеспечение АСУ запасами материальных ресурсов в двухуровневой логистической системе со случайным спросом // Труды Одесского политехнического университета. 2004. № 1. С. 133–136.

6. *Косоруков О.А., Свиридова О.А.* Учет неопределенности спроса при оптимизации системы управления запасами // Логистика. 2012. № 6. С. 12–13.

7. *Домбровский В.В., Чаусова Е.В.* Математическая модель управления запасами при случайном сезонном спросе и ненадежных поставщиках // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 271. С. 141–146.

8. *Петренко С.В., Карлова М.Ю.* Обеспечение оптимального управления запасами торгового предприятия при решении проблемы планирования ассортимента с помощью кластерного подхода // Перспективы науки. 2010. № 5. С. 120–124.

9. *Мандель А.С.* Управление многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Ч. I. Нормативная модель // Проблемы управления. 2011. № 6. С. 47–51.

10. *Мандель А.С.* Управление многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Ч. II. Создание страховых запасов // Проблемы управления. 2012. № 1. С. 42–46.

11. *Антипенко В.С., Кац Г.Б.* Задачи управления запасами со случайным спросом и случайным временем задержки // Автоматика и телемеханика. 1974. № 7. С. 178–182.

12. *Xin Chen, David Simchi-Levi*. Coordinating Inventory Control and Pricing Strategies with Random Demand and Fixed Ordering Cost: The Infinite Horizon Case. *Mathematics of Operations Research*, 2004, vol. 29, no. 3, pp. 698–723. doi: 10.1287/moor.1040.0093

13. *Arreola-Risa A., DeCroix G.A*. Inventory Management Under Random Supply Disruptions and Partial Backorders. *Naval Research Logistics (NRL)*, 1998, vol. 45, no. 7, pp. 687–703.

14. *Серая О.В., Клименко Т.А., Самородов В.Б.* Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. 2009. № 45. С. 31–34.

15. *Бочкарев А.А., Бочкарев П.А.* Проблема выбора поставщиков и оптимизации размера партии поставки в условиях изменяющегося спроса // Логистика и управление цепями поставок. 2014. № 1. С. 37–42.

16. *Кулакова Ю.Н.* Оценка нормировочного множителя в многопродуктовой модели управления запасами предприятия при условии равной периодичности и одинаковой стоимости поставок // Логистика и управление цепями поставок. 2012. № 3. С. 76–83.

17. *Дзензелюк Н.С.* Методология адаптивного управления производственными запасами в условиях нестационарного рынка // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер.: Экономика и менеджмент. 2011. № 21. С. 27–31.

18. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты и модели. М.: ФАЗИС, 1998. 512 с.

Информация о конфликте интересов

Мы, авторы данной статьи, со всей ответственностью заявляем о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи. Настоящее заявление относится к проведению научной работы, сбору и обработке данных, написанию и подготовке статьи, принятию решения о публикации рукописи.

ISSN 2311-8725 (Online)
ISSN 2073-039X (Print)

Mathematical Methods and Models

A THREE-PRODUCT MODEL TO MANAGE INVENTORY WITH RANDOM DEMAND

Artur A. MITSEL'[a], Lyudmila G. STAVCHUK[b,•]

[a] National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation
maa@asu.tusur.ru

[b] National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation
lyusbk93@gmail.com

[•] Corresponding author

Article history:
Received 26 August 2016
Received in revised form
27 December 2016
Accepted 17 January 2017
Available online 29 March 2017

JEL classification: C61

Keywords: logistics, inventory management, stochastic models, random demand

Abstract

Importance The article addresses the inventory management system and offers a stochastic model, which implementation implies significant cost saving when building inventory, as required resources are purchased in the amount of their deficit. This enables to reduce costs for storing the unused resources.

Objectives The aim of the study is to develop a three-product inventory management model with random demand and equal frequency of deliveries with minimum working capital.

Methods While building the model, it is assumed that at the initial stage the first product is purchased in full, the rest products are purchased in part, and then they are additionally during the cycle. The volume of delivery is arbitrary; the frequency of delivery of all resources is the same, but demand for the product is a random variable.

Results We built a three-product model for inventory management with random demand and equal frequency of deliveries under the stipulation that resources are replenished in the amount of their deficit. The simulation rests on the data on materials and supplies arrival at TOO SP VG-Plast.

Conclusions The proposed methodology for building a model to manage inventory with random demand helps obtain an analytical model only on condition that no more than three resources are purchased during the cycle. The offered three-product model enables to save up to 40.8% of current assets.

References

1. Buchan J., Koenigsberg E. *Nauchnoe upravlenie zapasami* [Scientific Inventory Management]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 423 p.

2. Kuznetsov D.N., Tolstykh S.S. [A stochastic model for multiple-stage management of multistock inventories]. *Upravlenie obshchestvennymi i ekonomicheskimi sistemami*, 2007, no. 1. (In Russ.) Available at: http://umc.gu-unpk.ru/umc/arhiv/2007/1/Kuznetsov_Tolstih.pdf.

3. Sviridova O.A. [Deterministic and stochastic models to minimize costs in inventory management systems]. *Logistika = Logistics*, 2011, no. 4, pp. 28–30. (In Russ.)

4. Belyakov A.G., Lapin A.V., Mandel' A.S. [Goods-in-feverish-demand inventory management]. *Problemy upravleniya = Control Sciences*, 2005, no. 6, pp. 40–45. (In Russ.)

5. Kozak Yu.A., Kolchin R.V. [Mathematical support to MIS for inventory in the two-tier logistics system with random demand]. *Trudy Odesskogo politekhnicheskogo universiteta = Works of Odessa Polytechnic University*, 2004, no. 1, pp. 133–136. (In Russ.)

6. Kosorukov O.A., Sviridova O.A. [Accounting for uncertainty of demand while optimizing the inventory management system]. *Logistika = Logistics*, 2012, no. 6, pp. 12–13. (In Russ.)

7. Dombrovskii V.V., Chausova E.V. [A mathematical model to manage inventory with random seasonal demand and non-reliable suppliers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University Journal*, 2000, no. 271, pp. 141–146. (In Russ.)

8. Petrenko S.V., Karlova M.Yu. [Implementing optimal management of trade enterprise's inventory in solving the problem of merchandise planning under a cluster approach]. *Perspektivy nauki = Science Prospects*, 2010, no. 5, pp. 120–124. (In Russ.)

9. Mandel' A.S. [Diversified inventory management under uncertainty and instability. Part I. A normative model]. *Problemy upravleniya = Control Sciences*, 2011, no. 6, pp. 47–51. (In Russ.)

10. Mandel' A.S. [Diversified inventory management under uncertainty and instability. Part II. Creating reserve stocks]. *Problemy upravleniya = Control Sciences*, 2012, no. 1, pp. 42–46. (In Russ.)

11. Antipenko V.S., Kats G.B. [Tasks of inventory management with random demand and random delay time]. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1974, no. 7, pp. 178–182. (In Russ.)

12. Xin Chen, David Simchi-Levi. Coordinating Inventory Control and Pricing Strategies with Random Demand and Fixed Ordering Cost: The Infinite Horizon Case. *Mathematics of Operations Research*, 2004, vol. 29, no. 3, pp. 698–723. doi: 10.1287/moor.1040.0093

13. Arreola-Risa A., DeCroix G.A. Inventory Management Under Random Supply Disruptions and Partial Backorders. *Naval Research Logistics*, 1998, vol. 45, no. 7, pp. 687–703.

14. Seraya O.V., Klimenko T.A., Samorodov V.B. [Choosing an optimization criterion in diversified inventory management]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo avtomobil'no-dorozhnogo universiteta = Bulletin of Kharkov National Automobile and Highway University*, 2009, no. 45, pp. 31–34. (In Russ.)

15. Bochkarev A.A., Bochkarev P.A. [The problem of choosing suppliers and optimizing the delivery batch size under changes in demand]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2014, no. 1, pp. 37–42. (In Russ.)

16. Kulakova Yu.N. [Evaluating the normalization factor in a multiproduct model for inventory management on condition of equal frequency and similar cost of deliveries]. *Logistika i upravlenie tsepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2012, no. 3, pp. 76–83. (In Russ.)

17. Dzenzelyuk N.S. [A methodology for adaptive management of manufacturing inventory in the unstable market]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Ekonomika i menedzhment = Bulletin of South Ural State University, Series Economics and Management*, 2011, no. 21, pp. 27–31. (In Russ.)

18. Shiryaev A.N. *Osnovy stokhasticheskoi finansovoi matematiki. T. 1. Fakty i modeli* [Fundamentals of stochastic financial mathematics. Vol. 1. Facts and models]. Moscow, FAZIS Publ., 1998, 512 p.

Conflict-of-interest notification

We, the authors of this article, bindingly and explicitly declare of the partial and total lack of actual or potential conflict of interest with any other third party whatsoever, which may arise as a result of the publication of this article. This statement relates to the study, data collection and interpretation, writing and preparation of the article, and the decision to submit the manuscript for publication.